H8−2024−**数　　学**

学科（記述式）試験問題

注　意　事　項

1. 問題は **3 題**で、解答時間は **1 時間 20 分**です。

2. 答案用紙の記入について

㈠　答案は濃くはっきり書き、書き損じた場合は、解答の内容がはっきり分かるように訂正してください。また、答案用紙の表側だけで書ききれないときは、「**裏に続く**」と書いて裏側を使用してください。

㈡　答案用紙は、表紙を除き **6 枚つづり 1 冊**です。

㈢　答案用紙の表紙の各欄にそれぞれ必要事項を記入してください。
［　　］―（　　）―［　　］の欄は［ H8 ］―（2024）―［**数　学**］と記入してください。

㈣　答案用紙各枚の右上の（　ページ）欄に上から順にページ数を記入してください。

㈤　下記のとおり指定されたページを使って解答してください。

【問題番号】	（ページ）
【No.　**1**】	（１～２）
【No.　**2**】	（３～４）
【No.　**3**】	（５～６）

㈥　答案用紙各枚の左上にある（No.　　）の欄には問題番号を記入してください。

㈦　試験の公正を害するおそれがありますので、答案用紙の氏名欄以外に氏名その他解答と関係のない事項を記載しないでください。

3. この問題集は、本試験種目終了後に持ち帰りができます。

4. 本試験種目の途中で退室する場合は、退室時の問題集の持ち帰りはできませんが、希望する方には後ほど渡します。別途試験官の指示に従ってください。なお、試験時間中に、この問題集を切り取ったり、転記したりしないでください。

5. 下欄に受験番号等を記入してください。

第１次試験地	受験番号	氏　　名

指示があるまで中を開いてはいけません。

途中で退室する場合……本試験種目終了後の問題集の持ち帰りを　　**希望しない**

【No.　**1**】 m, n を 0 以上の整数、α, β を実数とし、

$$I(m,\ n) = \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)^m (\beta - x)^n dx$$

とする。以下の設問に答えよ。

(1) $I(k,\ 0)$, $I(0,\ k)$ をそれぞれ求めよ。また、$I(k,\ 0)$ と $I(0,\ k)$ の関係式を述べよ。ただし、k は 0 以上の整数とする。

(2) $I(m,\ 1)$, $I(1,\ n)$ をそれぞれ求めよ。また、$\beta = \alpha + 1$ のとき、$I(m,\ 1) = I(1,\ n)$ の必要十分条件は $m = g(n)$ の形で表すことができる。$g(n)$ を求めよ。

(3) $I(m,\ n)$ を求めよ。

(4) xy 平面において、曲線 $y = -x^4 + \dfrac{10}{3}x^3 - 4x^2 + 2x - \dfrac{1}{3}$ と x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

【No.　**2**】 $|z| < 1$ を満たす複素数 z に対し、複素数からなる数列(複素数列) $\{S_n\}$ を

$$S_1 = 1$$

$$S_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1} \qquad (n = 2, 3, \cdots)$$

により定義する。以下の設問に答えよ。ただし、各設問の最終的な解答における式は総和記号 $\sum$、極限記号 lim、及び省略記号 … を用いない形で示すこと。

(1)　$0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$ の場合について、S_1, S_2, S_3 を表す点を複素数平面上に図示せよ。また、S_1 と S_2 を結ぶ線分 S_1S_2 の長さ、S_2 と S_3 を結ぶ線分 S_2S_3 の長さ、実軸と線分 S_1S_2 のなす角度、及び線分 S_1S_2 と線分 S_1S_3 のなす角度をそれぞれ z を用いて表し、それらを図に書き加えよ。

(2)　S_n を z を用いて表せ。

(3)　複素数列 $\{S_n\}$ の極限値を推測し、$\{S_n\}$ がその値に収束することを示せ。ただし、複素数列 $\{a_n\}$ がある複素数 a に収束するとは

$$\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$$

が成立することをいい、このときの a を $\{a_n\}$ の極限値という。

(4)　r を $0 \leqq r < 1$ を満たす実数、θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数とするとき、無限級数

$$1 + r\cos\theta + r^2\cos 2\theta + r^3\cos 3\theta + \cdots$$

の和を r, θ を用いて表せ。必要であれば、複素数列 $\{a_n\}$ が複素数 $a = \alpha + i\beta$ (α, β は実数) に収束するとき、a_n の実部は α に収束し、a_n の虚部は β に収束することを用いてよい。

(5)　$S_0 = 0$ として、複素数平面上の点 $S_0, S_1, S_2, \cdots, S_n$ を順次線分で結んで得られる折れ線の長さを L_n とする。L_n の $n \to \infty$ での極限を z を用いて表せ。

(6)　複素数 z を、実数 t を用いて $z = t + (1 - t)i$ と表す。t が $0 < t < 1$ の範囲を動くときの $\{S_n\}$ の極限値の軌跡を求め、z の軌跡及び原点を中心とする単位円と共に複素数平面上に図示せよ。

【No.　**3**】 xyz 空間において、原点 O を中心とする半径 1 の球面を S とし、球面 S に点 A$(1, 0, 0)$ で接する y 軸に平行な直線の上を動く点 B$(1, t, 0)$ を考える。ただし、$t > 0$ とする。点 B を通る S の接線のうち、S に $z > 0$ の領域で接し、かつ z 軸と交わるものを L とする。また、L と S の接点を C とし、L と z 軸の交点を D とする。以下の設問に答えよ。

(1)　点 C の座標を t を用いて表せ。

(2)　線分 BD の長さを t を用いて表せ。また、その最小値を求めよ。

(3)　点 C で球面 S に接する平面 M を考える。M と x 軸、y 軸との交点をそれぞれ E, F とする。三角形 DEF の面積を t を用いて表せ。また、その最小値を求めよ。