H8—2023— **数　　学**

学科（記述式）試験問題

注　意　事　項

1. 問題は **3 題**で、解答時間は **1 時間 20 分**です。

2. 答案用紙の記入について

(ア)　答案は濃くはっきり書き、書き損じた場合は、解答の内容がはっきり分かるように訂正してください。また、答案用紙の表側だけで書ききれないときは、「**裏に続く**」と書いて裏側を使用してください。

(イ)　答案用紙は、表紙を除き **6 枚つづり 1 冊**です。

(ウ)　答案用紙の表紙の各欄にそれぞれ必要事項を記入してください。
〔　　〕—(　　)—［　　　］の欄は〔 H8 〕—(2023)—［**数　学**］と記入してください。

(エ)　答案用紙各枚の右上の(　ページ)欄に上から順にページ数を記入してください。

(オ)　下記のとおり指定されたページを使って解答してください。

【問題番号】	(ページ)
【No.　**1**】	(1 ～ 2)
【No.　**2**】	(3 ～ 4)
【No.　**3**】	(5 ～ 6)

(カ)　答案用紙各枚の左上にある(No.　　)の欄には問題番号を記入してください。

(キ)　試験の公正を害するおそれがありますので、答案用紙の氏名欄以外に氏名その他解答と関係のない事項を記載しないでください。

3. この問題集は、本試験種目終了後に持ち帰りができます。

4. 本試験種目の途中で退室する場合は、退室時の問題集の持ち帰りはできませんが、希望する方には後ほど渡します。別途試験官の指示に従ってください。なお、試験時間中に、この問題集を切り取ったり、転記したりしないでください。

5. 下欄に受験番号等を記入してください。

第 1 次試験地	受験番号	氏　　　　名

指示があるまで中を開いてはいけません。

途中で退室する場合………本試験種目終了後の問題集の持ち帰りを　　　**希望しない**

【No.　1】　1 回引くと景品が 1 個当たるくじを考える。景品は全部で 3 種類あり、いずれも $\dfrac{1}{3}$ の確率で当たるものとする。

くじを n 回引いて入手した景品が 1 種類、2 種類、3 種類である確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とする（n は自然数）。以下の設問に答えよ。

(1) a_1, b_1, c_1 を求めよ。

(2) a_2, b_2, c_2 を求めよ。

(3) a_3, b_3, c_3 を求めよ。

(4) a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} それぞれを a_n, b_n, c_n のうち必要なものを用いて表せ。

(5) a_n, b_n, c_n を求めよ。

(6) $\lim_{n\to\infty} a_n$, $\lim_{n\to\infty} b_n$, $\lim_{n\to\infty} c_n$ を求めよ。

【No.　2】 四面体 OABC において、

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OB} = \vec{b},\ \overrightarrow{OC} = \vec{c}$$

とする。また、3 点 O, A, B を含む平面に点 C から下ろした垂線の足を点Hとする。以下の設問に答えよ。

⑴ △OAB の面積 S を $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ 及び $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を用いて表せ。なお、導出過程も示すこと。

⑵ ベクトル $\overrightarrow{OH}$ を、実数 s, t を用いて $\overrightarrow{OH} = s\vec{a} + t\vec{b}$ と表す。

(i) s, t を $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ 及び $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を用いて表せ。

(ii) $|\overrightarrow{OH}|^2$ を $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ 及び $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を用いて表すとき、⑴で求めた S を用いると

$$|\overrightarrow{OH}|^2 = \frac{P}{4S^2} \qquad \left(P \text{ は } |\vec{a}|,\ |\vec{b}| \text{ 及び } \vec{a}\cdot\vec{b},\ \vec{b}\cdot\vec{c},\ \vec{c}\cdot\vec{a} \text{ の多項式}\right)$$

の形に整理することができる。P を $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ 及び $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を用いて表せ。

(iii) $|\overrightarrow{CH}|^2$ を $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$ 及び $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を用いて表せ。

⑶ 四面体 OABC の体積 V を $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $|\vec{c}|$ 及び $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$, $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を用いて表せ。

【No.　3】 自然数 m に対して

$$I_m = \int_0^{\pi} \sin^m x \, dx$$

とし、0 以上の整数 n に対して

$$f(x) = (x^2 - 1)^n$$

$$P_n(x) = \frac{1}{n! \cdot 2^n} f^{(n)}(x)$$

とするとき、以下の設問に答えよ。ただし、$f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ を k 回微分した関数で、$f^{(0)}(x) = f(x)$ とする。

(1) $\dfrac{I_{2m+1}}{I_{2m-1}}$ を m を用いて表せ。なお、導出過程も示すこと。

(2) $I_{2m+1} = \dfrac{2^{2m+1}(m!)^2}{(2m+1)!}$ が成り立つことを示せ。

(3) $k = 0, 1, \cdots, n$ に対して

$$\int_{-1}^{1} x^k f^{(n)}(x) dx = (-1)^k k! \int_{-1}^{1} f^{(n-k)}(x) dx$$

が成り立つことを示せ。

(4) $n-1$ 次以下の全ての多項式 $Q(x)$ に対して

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) Q(x) dx = 0$$

が成り立つことを示せ。

(5) $0 \leqq m \leqq n$ を満たす 0 以上の整数 m, n について、$P_m(x)$ の次数に着目して、

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx$$

の値を求めよ。