

# $\begin{matrix} C1 \\ C2 \end{matrix}$ —2025—数理科学・物理・地球科学

## 専門(記述式)試験問題

### 注 意 事 項

1. 問題は **15 題**あります。このうち**任意の 2 題**を選んで解答してください。なお、この問題集の**裏表紙**に科目別構成の詳細が記載されていますので、解答開始前によく読んでおいてください。
2. 解答時間は **3 時間**です。
3. 答案用紙の記入について
  - (ア) 答案は濃くはっきり書き、書き損じた場合は、解答の内容がはっきり分かるように訂正してください。
  - (イ) 問題 **1 題に 1 枚**(両面)を使用してください。
  - (ウ) 表側の各欄にそれぞれ必要事項を記入してください。  
**問題番号欄には、解答した問題の番号をそれぞれ記入してください。**
  - (エ) 試験の公正を害するおそれがありますので、答案用紙の氏名欄以外に氏名その他解答と関係のない事項を記載しないでください。
4. 下書き用紙はこの問題集の**中央部**にとじ込んであります。**試験官の指示に従って、試験開始後に問題集から下書き用紙だけを慎重に引きはがして**使用してください。なお、誤って問題集を破損しても、問題集の交換はできませんので注意してください。
5. この問題集で単位 of 明示されていない量については、全て国際単位系(SI)を用いることとします。
6. この問題集は、本試験種目終了後に持ち帰りができます。
7. 本試験種目の途中で退室する場合は、退室時の問題集及び下書き用紙の持ち帰りはできませんが、希望する方には後ほど渡します。別途試験官の指示に従ってください。なお、試験時間中に、この問題集から**下書き用紙以外**を切り取ったり、問題を転記したりしないでください。
8. 下欄に受験番号等を記入してください。

|          |                           |      |     |
|----------|---------------------------|------|-----|
| 第 1 次試験地 | 試験の区分<br>数理科学・物理・<br>地球科学 | 受験番号 | 氏 名 |
|----------|---------------------------|------|-----|

**指示があるまで中を開いてはいけません。**

【No. 1】 以下の I、II の設問に答えよ。

I.  $m, n$  を正の整数とし、 $m$  行  $n$  列の実行列全体のなす実ベクトル空間を  $M(m, n)$  と表す。  
 $m$  次実正方行列  $A$  及び  $n$  次実正方行列  $B$  に対して、 $M(m, n)$  における線形写像  $L_A, R_B$  及び  
 $F(A, B) = L_A \circ R_B$  を以下のように定める。

$$L_A : M(m, n) \rightarrow M(m, n), \quad X \mapsto AX$$

$$R_B : M(m, n) \rightarrow M(m, n), \quad X \mapsto XB$$

$$F(A, B) : M(m, n) \rightarrow M(m, n), \quad X \mapsto AXB$$

このとき、以下の問いに答えよ。

(1)  $m = n = 2$  とする。今、

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

としたときに、 $\text{Ker } L_A, \text{Im } L_A$  の次元はそれぞれいくらか。

(2)  $n = 3$  とし、 $m$  は正の整数とする。今、

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

としたときに、 $R_B$  の固有値及びそれぞれの固有値に対する固有空間の次元はいくらか。

以下の設問においては、一般の正の整数  $m, n$  について答えよ。また、 $1 \leq i \leq m$ ,  
 $1 \leq j \leq n$  に対して、 $i$  行  $j$  列成分が 1 でその他の成分が 0 である行列を  $E_{ij} \in M(m, n)$  とする。

(3)  $A = (a_{ij})$  を  $m$  次正方行列、 $B = (b_{ij})$  を  $n$  次正方行列とする。 $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$  に対して、 $E_{ij}$  の  $F(A, B)$  による像を計算せよ。また、その結果を用いて  $\text{Tr } F(A, B)$  を計算せよ。

(4)  $L_A$  が全単射であることと  $A$  が正則であることは同値であることを示せ。また、これを用いて、 $F(A, B)$  が全単射であることと  $A, B$  がいずれも正則であることは同値であることを示せ。

(5)  $1 \leq p \leq m, 1 \leq q \leq n$  とする。 $\text{rank } A = p, \text{rank } B = q$  とするとき、 $\text{Im } F(A, B)$  の次元はいくらか。なお、必要に応じて次の事実を用いてよい。

$C$  を  $\text{rank } C = k, 1 \leq k \leq N$  を満たす  $N$  次正方行列としたとき、 $C$  に行基本変形及び列基本変形を施すことにより、

$$\begin{pmatrix} I_k & O(k, N-k) \\ O(N-k, k) & O(N-k, N-k) \end{pmatrix}$$

という形にできる。ただし、 $I_k$  は  $k$  次の単位正方行列、 $O(\alpha, \beta)$  は  $\alpha$  行  $\beta$  列の零行列である。

II.  $\mathbf{R}^2$  における空でない有界閉集合  $D$  及び  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$  に対して、

$$F_D(x, y) = \min \left\{ \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} \mid (a, b) \in D \right\}$$

と定めたとき、右辺における最小値は存在し、 $F_D(x, y)$  は  $\mathbf{R}^2$  上の連続関数となる。特に  $(x, y) \in D$  のときは  $F_D(x, y) = 0$  となる(以上の事実を証明する必要はない。)

広義 2 重積分

$$I_D = \iint_{\mathbf{R}^2} e^{-F_D(x, y)} dx dy$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1)  $\mathbf{R}^2$  における空でない有界閉集合  $D$  に対して  $I_D$  が有限の値に収束することを示せ。

以下の問いに答えよ。なお、計算の過程は、必要に応じて図を用いるなどして読みやすいように記すこと。

(2) (a)  $p$  を正の実数とし、 $D = \{(x, 0) \mid -p \leq x \leq p\}$  とする。 $F_D$  を記述せよ。

(b) (a)において  $I_D$  を計算せよ。

(3)  $D$  を  $\mathbf{R}^2$  内に配置された 3 辺の長さが  $l_1, l_2, l_3$  で面積が  $S$  である三角形(周及び内部)とする。 $I_D$  を計算せよ。

(4)  $r$  を正の実数とし、 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq r^2, x \geq 0, y \geq 0\}$  とする。 $I_D$  を計算せよ。

【No. 2】 以下のⅠ、Ⅱの設問に答えよ。

Ⅰ.  $G$  を群とし、 $e \in G$  をその単位元とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $a \in G$  に対し、写像  $\sigma_a: G \rightarrow G$  を  $\sigma_a(x) = axa^{-1}$  で定めるとき、 $\sigma_a$  が準同型であることを示せ。また、 $\sigma_a$  が全単射であることを示せ。
- (2) 写像  $\varphi: G \rightarrow \text{Aut}(G)$  を  $\varphi(a) = \sigma_a$  で定めるとき、 $\varphi$  が準同型であることを示せ。ただし、 $\text{Aut}(G)$  は  $G$  の自己同型群を表す。
- (3) 群  $G$  から群  $G'$  への準同型  $\psi: G \rightarrow G'$  を考える。このとき、 $G'$  の部分群  $H'$  に対し、逆像  $H = \psi^{-1}(H')$  が  $G$  の部分群となることを示せ。さらに、 $H'$  が  $G'$  の正規部分群であるなら、 $H$  も  $G$  の正規部分群となることを示せ。
- (4)  $G$  の正規部分群  $N_1, N_2$  が  $N_1 \cap N_2 = \{e\}$  を満たすとき、写像  $\Phi: N_1 \times N_2 \rightarrow G$  を  $\Phi(n_1, n_2) = n_1 n_2$  で定めると、 $\Phi$  は準同型であることを示せ。さらに、 $\Phi$  が単射であることを示せ。
- (5) 一般線形群  $\text{GL}_n(\mathbf{R})$  と特殊線形群  $\text{SL}_n(\mathbf{R})$  を考える。 $n$  が奇数であるなら、 $\text{GL}_n(\mathbf{R})$  が  $\text{SL}_n(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^\times$  と同型であることを示せ。ただし、 $\mathbf{R}^\times = \mathbf{R} \setminus \{0\}$  は乗法群とする。

Ⅱ. 3変数多項式環  $\mathbf{C}[x, y, z]$  から1変数多項式環  $\mathbf{C}[t]$  への準同型  $\varphi: \mathbf{C}[x, y, z] \rightarrow \mathbf{C}[t]$  を  $\varphi(f(x, y, z)) = f(t, t^2, t^3)$  により定める。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $\mathbf{C}[t]$  の任意のイデアルが単項イデアルであることを示せ。
- (2) イデアル  $I = (t^4 - t, t^4 + 2t^3 + t^2 - 1) \subset \mathbf{C}[t]$  に対し、 $I = (g)$  となるような  $g \in \mathbf{C}[t]$  を一つ求めよ。
- (3) 剰余環  $\mathbf{C}[t]/(t^3 - 1)$  の  $\mathbf{C}$  上のベクトル空間としての次元を求めよ。また、 $\bar{t} + 2 \in \mathbf{C}[t]/(t^3 - 1)$  の乗法に関する逆元を求めよ。ただし、 $\bar{t}$  はイデアル  $(t^3 - 1)$  に関する  $t$  の剰余類を表す。
- (4)  $\varphi$  の核  $\text{Ker } \varphi$  がイデアル  $(y - x^2, z - x^3)$  であることを示せ。また、これが素イデアルか否かを判定し、その理由を述べよ。
- (5) イデアル  $(y - x^2, z - x^3, x^4 + x^2)$  を含む  $\mathbf{C}[x, y, z]$  の極大イデアルを全て求めよ。

【No. 3】  $R, r$  を  $R > r > 0$  を満たす定数とする。 $uv$  空間  $\mathbf{R}^2$  から  $xyzw$  空間  $\mathbf{R}^4$  への  $C^\infty$  級写像  $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^4$  を

$$f(u, v) = \left( r \sin u \cos \frac{v}{2}, r \sin u \sin \frac{v}{2}, (R + r \cos u) \cos v, (R + r \cos u) \sin v \right)$$

により定める。このとき、以下の問いに答えよ。

(1)  $f$  の点  $(u, v)$  における微分写像を  $df_{(u, v)}: T_{(u, v)}\mathbf{R}^2 \rightarrow T_{f(u, v)}\mathbf{R}^4$  と表す。 $df_{(u, v)}$  による接ベクトル  $\frac{\partial}{\partial u}$  及び  $\frac{\partial}{\partial v}$  の像をそれぞれ求めよ。

(2)  $f$  がはめ込みであること、つまり、任意の  $(u, v)$  に対し、 $df_{(u, v)}$  が単射であることを示せ。

(3)  $f(u_1, v_1) = f(u_2, v_2)$  ならば

$$\begin{cases} u_2 = u_1 + 2m\pi \\ v_2 = v_1 + 4n\pi \end{cases} \quad \text{又は} \quad \begin{cases} u_2 = 2m\pi - u_1 \\ v_2 = v_1 + 2(2n + 1)\pi \end{cases}$$

を満たす  $m, n \in \mathbf{Z}$  が存在することを示せ。

(4)  $f$  の  $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \subset \mathbf{R}^2$  への制限が単射であることを示せ。

(5)  $f(\{0\} \times [0, 2\pi]) = f(\{2\pi\} \times [0, 2\pi])$  及び  $f([0, 2\pi] \times \{0\}) = f([0, 2\pi] \times \{2\pi\})$  を示せ。

(6)  $f$  の像がコンパクトであることを示せ。

以上のことから、写像  $f$  の定義域を  $[0, 2\pi) \times [0, 2\pi) \subset \mathbf{R}^2$  に制限した写像の像は、 $\mathbf{R}^4$  内の自己交差を持たない滑らかな閉曲面となることが分かる。以後、 $r = 1$  の場合を考え、この閉曲面を  $K$  と表す。

(7)  $K$  が向き付け可能か否か判定し、その理由を述べよ。

(8)  $xyzw$  空間  $\mathbf{R}^4$  上のユークリッド計量  $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2$  を  $K$  に制限して得られる  $K$  上のリーマン計量を  $g$  とする。 $g$  を  $(u, v)$  座標で表すとき、ある正値関数  $\varphi(u)$  が存在して

$$g = du^2 + \varphi(u)^2 dv^2$$

となることを示せ。

(9) 2次元リーマン多様体  $(K, g)$  の断面曲率を  $\kappa$  とするとき、 $\kappa = -\frac{\varphi''(u)}{\varphi(u)}$  と表せることを示せ。

(10)  $dV = \varphi(u) du dv$  は  $\iint_{[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]} dV > 0$  を満たす  $K$  の面積要素である。このとき、

$\iint_{[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]} \kappa dV$  の値を求め、その値がガウス・ボンネの定理と整合することを確かめよ。

【No. 4】 以下の I、II の設問に答えよ。

I.  $p$  を 1 以上の実数とする。実数列  $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$  に対して

$$\|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \in [0, \infty]$$

と定め、 $\|x\|_p < \infty$  を満たす実数列  $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$  全体の集合を  $l^p$  とする。以下の問いに答えよ。

- (1)  $x = (2^{-n})_{n=1}^{\infty}$  のとき、 $\|x\|_p$  及び  $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p$  を求めよ。
- (2) 数列  $\left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right)_{n=1}^{\infty}$  が  $l^p$  に属するような  $p$  の範囲を求めよ。
- (3) 数列  $\left( \frac{1}{\sqrt{n+1} \log_e(n+1)} \right)_{n=1}^{\infty}$  が  $l^p$  に属するような  $p$  の範囲を求めよ。
- (4)  $q$  を  $p$  より大きな実数とする。実数列  $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$  について、 $\|x\|_p = 1$  ならば  $\|x\|_q \leq 1$  であることを示せ。これを用いて、 $l^p \subset l^q$  であることを示せ。
- (5)  $\alpha, \beta$  を 0 以上の実数とすると、

$$(\alpha + \beta)^p \leq 2^{p-1}(\alpha^p + \beta^p)$$

が成り立つことを示せ。これを用いて、 $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$  及び  $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$  を  $l^p$  の元とすると、  
 $x + y = (x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$  で定まる実数列  $x + y$  は  $l^p$  の元であることを示せ。

II.  $a = (a_n)_{n=1}^{\infty}$  を実数列とすると、以下の問いに答えよ。

- (1)  $a \in l^2$  のとき、任意の  $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in l^2$  に対して無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$  は絶対収束することを示せ。
- (2)  $a \notin l^2$  とし、実数列  $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$  を

$$x_n = \frac{a_n}{a_1^2 + \cdots + a_n^2 + 1} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

で定める。このとき、任意の正の整数  $N$  に対して

$$\sum_{n=1}^N x_n^2 \leq \frac{a_1^2}{(a_1^2 + 1)^2} + \frac{1}{a_1^2 + 1} - \frac{1}{a_1^2 + \cdots + a_N^2 + 1}$$

が成り立つことを示し、これを用いて  $x \in l^2$  であることを示せ。

- (3) (2)において、

$$a_{N+1}^2 + \cdots + a_{N+M}^2 \geq a_1^2 + \cdots + a_N^2 + 1$$

を満たす任意の正の整数  $N, M$  に対して

$$\sum_{n=N+1}^{N+M} a_n x_n \geq \frac{1}{2}$$

が成り立つことを示し、これを用いて無限級数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$  が発散することを示せ。

【No. 5】 以下の I、II、III の設問に答えよ。

I.  $\lambda, \mu$  を正の定数とする。確率変数  $X, Y$  は独立で、それぞれの確率密度関数  $f_X(x), f_Y(y)$  は

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} \mu e^{-\mu y} & (y > 0) \\ 0 & (y \leq 0) \end{cases}$$

で与えられるとする。確率変数  $Z = X + Y$  を考えるとき、以下の問いに答えよ。

- (1)  $Z$  の確率密度関数  $f_Z(z)$  を求めよ。
- (2)  $x_0$  を正の実数とする。 $X = x_0$  の下での  $Z$  の条件付き確率密度関数  $f_{Z|X}(z|x_0)$  を求めよ。
- (3) 2次元確率変数  $(X, Z)$  の同時分布の確率密度関数  $f_{X,Z}(x, z)$  を求めよ。
- (4)  $z_0$  を正の実数とし、 $\lambda = \mu$  とする。 $Z = z_0$  の下での  $X$  の条件付き確率密度関数  $f_{X|Z}(x|z_0)$  及び条件付き期待値  $E(X|Z = z_0)$  を求めよ。

II. 確率変数  $X_1, X_2, \dots$  は独立であり、全ての正の整数  $n$  と全ての正の実数  $x$  に対し、

$$\frac{x}{\sqrt{2\pi}(x^2 + 1)} e^{-\frac{x^2}{2}} \leq P(X_n > x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}x} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

が満たされるとする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 任意の正の整数  $m$  について、

$$P\left(\left\{\omega \left| \text{無限個の } n \text{ に対し、} \frac{X_n(\omega)}{\sqrt{2\log_e n}} > 1 + \frac{1}{m} \text{ である。} \right\}\right) = 0$$

となることを示せ。

- (2) 任意の 2 以上の整数  $m$  について、

$$P\left(\left\{\omega \left| \text{無限個の } n \text{ に対し、} \frac{X_n(\omega)}{\sqrt{2\log_e n}} > 1 - \frac{1}{m} \text{ である。} \right\}\right) = 1$$

となることを示せ。

- (3) (1)と(2)で得られた結果から、 $P\left(\left\{\omega \left| \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n(\omega)}{\sqrt{2\log_e n}} = 1 \right\}\right) = 1$  を示せ。

III. 確率変数の列  $X_1, X_2, \dots$  が確率変数  $X$  に法則収束し、確率変数の列  $Y_1, Y_2, \dots$  が定数確率変数  $c$  に法則収束するとする。このとき、以下の問いに答えよ。なお、確率変数の列  $Z_1, Z_2, \dots$  が確率変数  $Z$  に法則収束するとは、 $\mathbf{R}$  上の任意の有界一様連続関数  $f$  について、

$\lim_{n \rightarrow \infty} E(f(Z_n)) = E(f(Z))$  となることである。また、必要に応じて次の事実を用いてよい。

確率変数の列  $Z_1, Z_2, \dots$  がある確率変数に法則収束するとき、任意の正の実数  $\varepsilon$  に対し、あ

る正の実数  $K$  を取ることにより、 $\sup_{n \in \{1, 2, \dots\}} P(|Z_n| > K) < \varepsilon$  となる。

- (1) 確率変数の列  $X_1 + Y_1, X_2 + Y_2, \dots$  は、確率変数  $X + c$  に法則収束することを示せ。
- (2) 確率変数の列  $Y_1 X_1, Y_2 X_2, \dots$  は、確率変数  $cX$  に法則収束することを示せ。

【No. 6】 以下のⅠ、Ⅱの設問に答えよ。

Ⅰ. 以下の問いに答えよ。

(1) 非負確率変数  $Z$  と任意の  $a > 0$  に対し、 $P(Z \geq a) \leq \frac{E[Z]}{a}$  を示せ。

(2) 確率変数  $Z$  が  $E[Z] = 0$ ,  $a \leq Z \leq b$  ( $a < 0, b > 0$ ) を満たすとき、任意の  $t > 0$  に対して

$E[\exp(tZ)] \leq \exp\left(\frac{t^2(b-a)^2}{8}\right)$  となることを示せ。なお、任意の  $t > 0$  に対して

$-\frac{a}{b-a}\exp(tb) + \frac{b}{b-a}\exp(ta) \leq \exp\left(\frac{t^2(b-a)^2}{8}\right)$  が成り立つことを用いてよい。

(3) 確率変数  $Z_1, \dots, Z_n$  は互いに独立であるとし、 $a_i \leq Z_i \leq b_i$  を満たすとする。また、 $S_n = \sum_{i=1}^n Z_i$  とする。

(a) 任意の  $t > 0$ ,  $\epsilon > 0$  に対し、 $\exp(t(S_n - E[S_n]))$  は非負確率変数であることを用いて

$P(S_n - E[S_n] \geq \epsilon) \leq \exp(-t\epsilon) \exp\left(\frac{t^2 \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}{8}\right)$  となることを示せ。

(b) 任意の  $\epsilon > 0$  に対し、 $P(S_n - E[S_n] \geq \epsilon) \leq \exp\left(-\frac{2\epsilon^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right)$ ,

$P(S_n - E[S_n] \leq -\epsilon) \leq \exp\left(-\frac{2\epsilon^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right)$  となることを示せ。

II. 以下の問いに答えよ。ただし、設問 I の結果を証明なしで用いてもよい。

ある確率分布  $P(X, Y)$  に独立に従う例題  $(X_i, Y_i)$  ( $i = 1, \dots, n$ ) から成るデータセット  $S = \{(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\}$  が与えられたとする。ただし、 $X \in \mathbf{R}^d$ ,  $Y \in \{1, -1\}$  とする。このとき、 $X$  を用いて  $Y$  を予測することを考える。 $\mathbf{R}^d$  から  $\{1, -1\}$  への関数  $h(X)$  を仮説と呼び、仮説から成る集合を  $H = \{h_1, \dots, h_k\}$  が与えられたとする。

データセット  $S$  を用いて仮説の集合  $H = \{h_1, \dots, h_k\}$  から仮説を一つ選択する。このとき、仮説  $h$  の性能の評価規準として訓練誤差  $\hat{L}(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$  を考え、訓練誤差  $\hat{L}(h)$  を最小にするような仮説  $h_S$  を  $H$  から選択する。ただし、 $Z_i = I(h(X_i) \neq Y_i)$ ,  $I(A) = \begin{cases} 1 & (A \text{ が真のとき}) \\ 0 & (A \text{ が偽のとき}) \end{cases}$  とする。

また、データセット  $S$  には現れない例題も含んだ新たなデータセットで仮説  $h$  の性能を測った場合に相当する汎化誤差  $L(h) = E_{(X, Y) \sim P(X, Y)}[I(h(X) \neq Y)]$  を考え、汎化誤差を最小にするような仮説を  $h_0$  とする。このとき、データセット  $S$  を用いて選んだ仮説  $h_S$  の汎化誤差  $L(h_S)$  と、汎化誤差の  $H$  上の最小値  $L(h_0)$  の差分  $L(h_S) - L(h_0)$  を評価することを考える。

(1)  $L(h_0)$ ,  $L(h_S)$ ,  $\hat{L}(h_0)$ ,  $\hat{L}(h_S)$  の大小関係について、常に成立するものを次の①～⑧から全て選べ。

ただし、この問いは答えのみでよい。

- ①  $L(h_0) \leq L(h_S)$     ②  $L(h_S) \leq L(h_0)$     ③  $\hat{L}(h_0) \leq \hat{L}(h_S)$     ④  $\hat{L}(h_S) \leq \hat{L}(h_0)$   
 ⑤  $L(h_0) \leq \hat{L}(h_0)$     ⑥  $\hat{L}(h_0) \leq L(h_0)$     ⑦  $L(h_S) \leq \hat{L}(h_S)$     ⑧  $\hat{L}(h_S) \leq L(h_S)$

(2)  $L(h_S) - L(h_0) \leq 2 \max_{h \in H} |L(h) - \hat{L}(h)|$  となることを示せ。

(3) 任意の  $\epsilon > 0$  に対して、 $P\left(|\hat{L}(h) - L(h)| \geq \frac{\epsilon}{2}\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{n\epsilon^2}{2}\right)$  となることを示せ。

(4) 任意の  $\epsilon > 0$  に対して、 $P\left(\max_{h \in H} |\hat{L}(h) - L(h)| \geq \frac{\epsilon}{2}\right) \leq 2k \exp\left(-\frac{n\epsilon^2}{2}\right)$  となることを示せ。

(5) 任意の  $\epsilon > 0$  に対して、 $P(L(h_S) - L(h_0) \geq \epsilon) \leq 2k \exp\left(-\frac{n\epsilon^2}{2}\right)$  となることを示せ。

(6) (5)において  $k = 500$ ,  $\epsilon = 0.01$  とする。(5)の評価を適用することによって

$P(L(h_S) - L(h_0) \leq 0.01) \geq 0.99$  となるための最小の  $n$  を求めよ。ただし、 $\log$  を自然対数とし、 $\log 10 = 2.30$  としてよい。

【No. 7】 相互作用する 2 個の非線形振動子の複素振幅  $W_1$ ,  $W_2$  の時間発展が、次のように表されるとする。

$$\frac{dW_1}{dt} = (1 + i\omega_1)W_1 - |W_1|^2 W_1 + D(W_2 - W_1)$$

$$\frac{dW_2}{dt} = (1 + i\omega_2)W_2 - |W_2|^2 W_2 + D(W_1 - W_2)$$

ただし、 $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $D$  は実数、 $i$  は虚数単位で、 $\omega_1 > \omega_2$  及び  $D > 0$  とする。

以下の I、II の設問に答えよ。

I.  $W_n = A_n e^{i\theta_n}$  ( $n = 1, 2$ ),  $\phi = \theta_1 - \theta_2$  とおく。このとき、以下の問いに答えよ。

ただし、 $A_n$ ,  $\theta_n$  は時刻  $t$  に依存する実数であり、 $A_n > 0$  であるとする。

(1) 以下の設問に答えよ。

(a)  $\frac{dA_1}{dt}$  及び  $\frac{dA_2}{dt}$  をそれぞれ、 $\phi$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $D$  のうち必要なものを用いて表せ。

(b)  $\frac{d\theta_1}{dt}$  及び  $\frac{d\theta_2}{dt}$  をそれぞれ、 $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $D$  のうち必要なものを用いて表せ。

(c)  $\frac{d\phi}{dt}$  を、 $\phi$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $D$  のうち必要なものを用いて表せ。

(2) 二つの振動子が同じ振幅  $A$  をもつとき、すなわち  $A_1 = A_2 = A$  の場合を考える。

(a)  $\phi$  が時間に依存しない解、すなわち定常解  $\phi^*$  をもつとき、 $\sin \phi^*$  を  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $D$  を用いて表せ。

(b)  $\phi = \phi^*$  のとき、同じ振動数で振動する、すなわち  $\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{d\theta_2}{dt}$  となることを示せ。

(c)  $\phi = \phi^*$  のとき、 $A$  が時間に依存しない解  $A^*$  (ただし、 $A^* \neq 0$ ) をもつとする。 $(A^*)^2$  を、 $\phi^*$ ,  $D$  を用いて表せ。

(3) 二つの振動子が同じ振動数で振動することを振動の同期という。定常解  $\phi = \phi^*$ ,

$A_1 = A_2 = A^*$  が安定な同期解となる条件を考える。

(a) (1)(c) で求めた式を利用して、 $\phi = \phi^*$  が線形安定となるような  $\phi^*$  の範囲を求めよ。ただし、(2)(a) で与えた  $\sin \phi^*$  の範囲を考慮すること。

(b)  $\phi = \phi^*$  が (a) の条件を満たしているとき、(1)(a) で求めた式を利用して、 $A_1 = A_2 = A^*$  が線形安定となる条件を  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $D$  を用いて表せ。

(4)  $A_1 \neq A_2$  の場合にも同期解は存在し得る。その同期解における振動数を求めよ。

ただし、 $\phi = \phi^*$  であるとする。

II.  $W_n = x_n + iy_n$  ( $n = 1, 2$ ) とおく。このとき、以下の問いに答えよ。

ただし、実数  $x_n, y_n$  の絶対値は十分に小さいとする。

- (1)  $\frac{dx_1}{dt}, \frac{dy_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dy_2}{dt}$  を  $x_1, y_1, x_2, y_2$  の 1 次式で近似せよ。
- (2) パラメータ  $\omega_1, \omega_2, D$  の値によっては、振動が停止する場合がある。振動停止解  $W_1 = W_2 = 0$  が線形安定となる条件を、 $\omega_1 - \omega_2 > 2D$  の場合と  $\omega_1 - \omega_2 < 2D$  の場合に分けて表せ。

【No. 8】  $n$  は 2 以上の整数、 $M \in \mathbf{R}^{n \times n}$  を正定値実対称行列、 $q \in \mathbf{R}^n$  とする。凸 2 次関数

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Mx + q^T x \text{ を最小化する次の最適化問題 (P) を考える。}$$

ただし、 $y \in \mathbf{R}^n$  に対し、 $y^T$  で転置ベクトルを表す。

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} f(x) \quad \cdots (P)$$

また、非零ベクトル  $v, w \in \mathbf{R}^n$  が問題 (P) における正定値実対称行列  $M$  に関して  $M$  共役であるとは、 $v^T M w = 0$  を満たすときをいう。

この問題を解くためのアルゴリズムである共役方向法と共役勾配法に関する以下の I、II の設問に答えよ。

I. 共役方向法に関する以下の問いに答えよ。

#### 共役方向法

Step 0 : 初期点  $x^0 \in \mathbf{R}^n$  を任意に選ぶ。 $k \leftarrow 0$  とする。

Step 1 :  $\nabla f(x^k) = 0$  ならば停止。そうでないならば、 $k = 0$  のとき非零ベクトル  $d^0 \in \mathbf{R}^n$  を任意に選び、 $k \geq 1$  のとき  $d^0, d^1, \dots, d^{k-1} \in \mathbf{R}^n$  と  $M$  共役な非零ベクトル  $d^k \in \mathbf{R}^n$  を一つ求める。ただし、 $\nabla f(x)$  は  $f$  の勾配を表し、 $\nabla f(x) = Mx + q$  である。

Step 2 :  $t_k \leftarrow \left( \min_{x \in \mathbf{R}^n} f(x^k + t d^k) \text{ の最適解 } t \right)$ 、 $x^{k+1} \leftarrow x^k + t_k d^k$  とする。

Step 3 :  $k \leftarrow k + 1$  として Step 1 へ。

(1)  $0 \leq k \leq n - 1$  について、 $\nabla f(x^k) \neq 0$  のとき、 $d^0, d^1, d^2, \dots, d^k$  は 1 次独立であることを示せ。

(2) Step 2 において  $t_k$  を求めよ。ただし、解答に当たり、 $M, x^k, q, d^k$  を用いること。

(3)  $0 \leq k \leq n - 1$  について、 $\nabla f(x^k) \neq 0$  のとき、 $\mathbf{R}^n$  におけるアフィン空間  $S_k$  を

$$S_k = \left\{ x^0 + \sum_{i=0}^k \alpha_i d^i \mid \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbf{R} \right\} \text{ と定義する。 } \alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k)^T \in \mathbf{R}^{k+1},$$

$$\hat{f}(\alpha) = f\left(x^0 + \sum_{i=0}^k \alpha_i d^i\right) \text{ としたときの } \frac{\partial \hat{f}(\alpha)}{\partial \alpha_i} \text{ を } i = 0, 1, \dots, k \text{ について求めるとともに、}$$

$x^{k+1}$  は  $\min_{x \in S_k} f(x)$  の最適解であることを示せ。

(4)  $0 \leq k \leq n - 1$  について、 $\nabla f(x^k) \neq 0$  のとき、 $\nabla f(x^{k+1})^T d^i = 0$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, k$ ) であることを示せ。

(5) 共役方向法は、高々  $n$  回の反復で問題 (P) の最適解を見付けることができることを示せ。

II. 共役勾配法に関する以下の問いに答えよ。

共役勾配法

Step 0 : 初期点  $x^0 \in \mathbf{R}^n$  を任意に選ぶ。  $k \leftarrow 0$  とする。

Step 1 :  $\nabla f(x^k) = 0$  ならば停止。 そうでないならば、  $k = 0$  のとき、  $d^0 \leftarrow -\nabla f(x^0)$  とし、  
  $k \geq 1$  のとき

$$d^k \leftarrow -\nabla f(x^k) + \frac{\|\nabla f(x^k)\|^2}{\|\nabla f(x^{k-1})\|^2} d^{k-1}$$

とする。ただし、  $v \in \mathbf{R}^n$  に対して  $\|v\| = \sqrt{v^T v}$  である。

Step 2 :  $t_k \leftarrow \left( \min_{x \in \mathbf{R}^n} f(x^k + t d^k) \text{ の最適解 } t \right)$ 、  $x^{k+1} \leftarrow x^k + t_k d^k$  とする。

Step 3 :  $k \leftarrow k + 1$  として Step 1 へ。

$\nabla f(x^n) = 0$  となることを以下の問いの流れにしたがって証明せよ。

ただし、設問 I の結果を用いる際は、どれをどのように用いたかを明記すること。また簡単のため共役勾配法が生成する点列  $\{x^k\}_{k \geq 0}$  に関して次が成り立つと仮定する。

(A1)  $\nabla f(x^k) \neq 0$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ )

(A2)  $w^0 = -\nabla f(x^0)$ ,  $w^k = -\nabla f(x^k) + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\nabla f(x^k)^T M w^i}{(w^i)^T M w^i} w^i$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ )

と定義したとき、  $w^0, w^1, \dots, w^{n-1}$  は非零で互いに  $M$  共役である。

(A3)  $0 \leq k \leq n-1$  について、  $\nabla f(x^{k+1})^T \nabla f(x^i) = 0$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, k$ ) である。

(1)  $0 \leq k \leq n-1$  について、  $t_k \neq 0$  を示せ。

(2)  $0 \leq k \leq n-2$  とする。このとき、  $d^j = w^j$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, k$ ) であるならば、次が成り立つことを示せ。

(a)  $M d^j = \frac{(d^j)^T M d^j}{\|\nabla f(x^j)\|^2} (\nabla f(x^{j+1}) - \nabla f(x^j))$  ( $j = 0, 1, 2, \dots, k$ )

(b)  $d^{k+1} = w^{k+1}$

(3)  $\nabla f(x^n) = 0$  であること、すなわち、  $x^n$  は問題(P)の最適解であることを示せ。

【No. 9】 力学及び電磁気学に関する以下のⅠ、Ⅱの設問に答えよ。

Ⅰ. 力学に関する以下の問いに答えよ。

滑らかな水平面上で、ばね定数  $k$  のばねの一端を固定し、他端に質量  $m$  の質点をつないだ 1 次元の力学系を考える。質点の位置を  $x$  とし、ばねの自然長での質点の位置を  $x = 0$  とする。質点には、時間を  $t$  として、周期的な外力  $f \cos \omega t$  が加えられる。ここで、 $f$  は定数、 $\omega$  は角振動数である。また、その外力に加えて、質点は速度に比例した抵抗力（ただし、比例係数を  $-m\gamma$  とする）を受けるものとする。この質点は外力の有無や  $\omega$ ,  $\gamma$  ( $\gamma \geq 0$ ) の大きさなどによって様々な運動をする。

- (1) 質点の運動方程式を書け。
- (2)  $f = 0$ ,  $\gamma = 0$  のとき、この質点の角振動数の絶対値  $\omega_0$  を求めよ。

以下では、簡単のため、 $m = 1$ ,  $k = 1$  とする。

- (3)  $f = 0$ ,  $\gamma \neq 0$  のとき、時刻  $t = 0$  に質点を位置  $x = 0$  から速度  $v_0$  で放したところ、質点は一定の周期で減衰振動を始めた。このとき、 $\gamma$  はある値  $\gamma_0$  より小さくなければならない。この値  $\gamma_0$  を求めよ。また、このときの運動方程式の解を求めよ。

以下では、簡単のため、 $m = 1$ ,  $k = 1$ ,  $f = 1$ ,  $\omega = 1$  とする。

- (4)  $\gamma = 0$  のとき、時刻  $t = 0$  に質点を位置  $x = 0$  から速度 0 で放した。このときの運動方程式の解を求めよ。
- (5)  $0 < \gamma < \gamma_0$  のとき、時刻  $t = 0$  に質点を位置  $x = 0$  から速度 0 で放した。このときの運動方程式の解を求めよ。

II. 電磁気学に関する以下の問いに答えよ。

正負の点電荷  $\pm q$  ( $q > 0$ ) が微小変位  $d$  を隔てて置かれたものを、電気双極子という。また、大きさが  $d$  で負の電荷から正の電荷への向きをもつ変位ベクトルを  $\mathbf{d}$  とすると、 $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$  を電気双極子モーメントという。ただし、真空の誘電率を  $\varepsilon_0$  とする。

必要に応じて、位置ベクトルを  $\mathbf{r}$  として、 $|\mathbf{r}| = r$ ,  $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$  とし、次の関係式、及び、 $|\mathbf{r}| \gg |d\mathbf{r}|$  で成立する次の近似式を使ってもよい。

$$\cdot \nabla(f(\mathbf{r})g(\mathbf{r})) = (\nabla f(\mathbf{r}))g(\mathbf{r}) + f(\mathbf{r})(\nabla g(\mathbf{r}))$$

$$\cdot \nabla(r^n) = nr^{n-1} \frac{\mathbf{r}}{r} = nr^{n-2} \mathbf{r}$$

$$\begin{aligned} \cdot \phi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) &\cong \phi(\mathbf{r}) + \left\{ dx \frac{\partial}{\partial x} \phi(\mathbf{r}) + dy \frac{\partial}{\partial y} \phi(\mathbf{r}) + dz \frac{\partial}{\partial z} \phi(\mathbf{r}) \right\} \\ &= \phi(\mathbf{r}) + (d\mathbf{r} \cdot \nabla) \phi(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

図 I のように、原点に電気双極子モーメント  $\mathbf{p}$  の電気双極子があるときを考える。

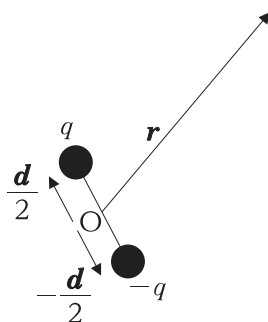


図 I

- (1) 位置  $\mathbf{r}$  における電位  $\phi_p(\mathbf{r})$  を、 $\varepsilon_0$ ,  $q$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{d}$  を用いて表せ。また、点電荷  $\pm q$  を含む平面における電位  $\phi_p(\mathbf{r})$  の等電位線の分布の概略図を描け。
- (2)  $\mathbf{p}$  による電場  $\mathbf{E}_p(\mathbf{r})$  を求めよ。また、(1) で描いた等電位線の概略図上に、矢印の付いた曲線で電気力線を描き、等電位線との関係を説明せよ。
- (3)  $r \gg d$  での電位  $\phi_p(\mathbf{r})$  は、

$$\phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$$

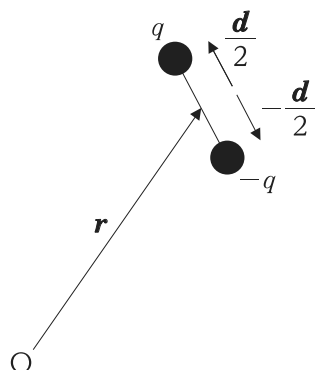
と近似できることを示せ。

- (4)  $r \gg d$  での電場  $\mathbf{E}_p(\mathbf{r})$  は、

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \left\{ \mathbf{p} - \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2} \right\}$$

と近似できることを示せ。

図Ⅱのように、外部電場  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  中の、位置  $\mathbf{r}$  に電気双極子モーメント  $\mathbf{p}$  の電気双極子を置いたときを考える。



図Ⅱ

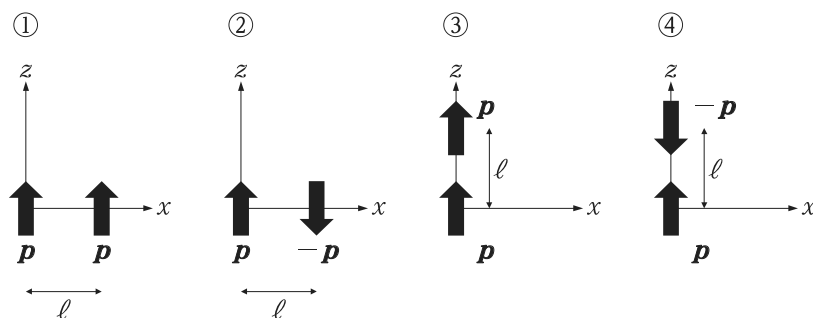
- (5)  $\mathbf{p}$  に働く力  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  を、 $q$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{d}$  を用いて表せ。また、 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  は、 $r \gg d$  では、

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r})$$

と近似できることを示せ。

- (6) 距離  $\ell$  だけ離れて配置された二つの電気双極子間に働く力を考える。図Ⅲにおける①～④の場合について、矢印のように配置された電気双極子間に働く力は引力か斥力かを示しつつ、その理由を説明せよ。また、それぞれの場合の力の大きさを求めよ。

ただし、電気双極子は原点及び座標軸上にあり、電気双極子間の距離  $\ell$  は  $d$  より十分大きく、電気双極子モーメントの大きさは  $p$ 、向きは  $z$  軸の正か負のいずれかの方向である。



図Ⅲ

【No. 10】 量子力学に関する以下の I、II の設問に答えよ。ただし、虚数単位を  $i$  とする。

I. 質量  $m$ 、角振動数  $\omega$ 、エネルギー  $E$  の 2 次元調和振動子の定常状態の波動関数  $\psi(r, \theta)$  に対するシュレディンガー方程式は、極座標  $(r, \theta)$  を用いて

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \psi(r, \theta) + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \psi(r, \theta) = E \psi(r, \theta)$$

のように表される。さらに、 $\psi(r, \theta) = R(r)Y(\theta)$  と変数分離すると、 $\theta$  方向の波動関数  $Y(\theta)$  に関する微分方程式は、定数  $\ell$  を用いて

$$\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{d\theta^2} = -\ell^2$$

のように表される。以下の問いに答えよ。

- (1)  $Y(\theta)$  を求め、 $\ell$  の取り得る値について説明せよ。ただし、 $Y(\theta)$  は  $\theta$  方向に関して規格化されているとする。
- (2)  $R(r)$  に関する常微分方程式を  $\ell$  を用いて表せ。
- (3)  $R(r)$  について、 $r \rightarrow 0$  における漸近解は  $R(r) \sim r^a$  ( $0 < a$ )、 $r \rightarrow \infty$  における漸近解は  $R(r) \sim e^{-\frac{b}{2}r^2}$  ( $0 < b$ ) のように表される。 $a$  及び  $b$  を求めよ。
- (4) (3) で求めた  $a$  と  $b$  を用いて、 $\rho = br^2$  と変数変換し、 $R(r) = F(\rho)\rho^{\frac{a}{2}}e^{-\frac{1}{2}\rho}$  と置く。この式を (2) で求めた  $R(r)$  に関する微分方程式に代入すると、 $F(\rho)$  に関する微分方程式は

$$\rho \frac{d^2 F(\rho)}{d\rho^2} + (|\ell| + 1 - \rho) \frac{dF(\rho)}{d\rho} + n_\rho F(\rho) = 0$$

となる。このとき、係数  $n_\rho$  を求めよ。

なお、必要に応じて

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\rho} &= \left\{ \frac{dF}{d\rho} + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{\rho} - 1 \right) F \right\} \rho^{\frac{a}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho} \\ \frac{d^2 R}{d\rho^2} &= \left\{ \frac{d^2 F}{d\rho^2} + \left( \frac{a}{\rho} - 1 \right) \frac{dF}{d\rho} + \left( -\frac{a}{2\rho^2} + \frac{a^2}{4\rho^2} - \frac{a}{2\rho} + \frac{1}{4} \right) F \right\} \rho^{\frac{a}{2}} e^{-\frac{1}{2}\rho} \end{aligned}$$

を用いてよい。

- (5) (4) で求めた  $F(\rho)$  が満たす微分方程式はラゲール陪微分方程式と呼ばれ、 $n_\rho = 0, 1, 2, \dots$  のとき規格化可能な波動関数  $\psi$  をもつ。2 次元調和振動子のエネルギー  $E$  を  $n_\rho$  を用いて表せ。また、第  $n$  励起状態 ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) の縮退度を求めよ。

II. 3次元直交座標における角運動量演算子を  $\mathbf{J} = (J_x, J_y, J_z)$  とする。角運動量演算子は  $[J_x, J_y] = i\hbar J_z$  などの交換関係を満たす。 $\mathbf{J}^2$  と  $J_z$  は交換するので、規格化された同時固有状態  $|j, m\rangle$  を選ぶことができ、固有値は

$$\mathbf{J}^2 |j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1) |j, m\rangle, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$$

$$J_z |j, m\rangle = \hbar m |j, m\rangle, \quad m = -j, -j+1, \dots, j-1, j$$

となる。また、昇降演算子を  $J_{\pm} = J_x \pm iJ_y$  と定義すると、

$$J_+ |j, m\rangle = c_{j,m} |j, m+1\rangle, \quad J_- |j, m\rangle = d_{j,m} |j, m-1\rangle$$

となる。ただし、 $c_{j,m}$  及び  $d_{j,m}$  は、 $j$  と  $m$  の値によって決まる正の実数であるとする。

以下の問いに答えよ。

- (1)  $J_- J_+$  及び  $J_+ J_-$  を、それぞれ  $\mathbf{J}^2$ 、 $J_z^2$  及び  $J_z$  の線形結合で表せ。
- (2)  $c_{j,m}$  及び  $d_{j,m}$  を、それぞれ  $j$  及び  $m$  を用いて表せ。

次に、スピン  $\frac{1}{2}$  の角運動量演算子を  $\mathbf{S} = (S_x, S_y, S_z)$  とし、 $\mathbf{S}^2$  と  $S_z$  の同時固有状態を

$$|+\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \quad |-\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle$$

と表す。また、昇降演算子を  $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$  と定義する。

- (3) 以下の行列を求めよ。

$$M_+ = \begin{pmatrix} \langle + | S_+ | + \rangle & \langle + | S_+ | - \rangle \\ \langle - | S_+ | + \rangle & \langle - | S_+ | - \rangle \end{pmatrix}, \quad M_- = \begin{pmatrix} \langle + | S_- | + \rangle & \langle + | S_- | - \rangle \\ \langle - | S_- | + \rangle & \langle - | S_- | - \rangle \end{pmatrix},$$

$$M_z = \begin{pmatrix} \langle + | S_z | + \rangle & \langle + | S_z | - \rangle \\ \langle - | S_z | + \rangle & \langle - | S_z | - \rangle \end{pmatrix}$$

スピン  $\frac{1}{2}$  の粒子 1 とスピン  $\frac{1}{2}$  の粒子 2 が束縛状態であるとする。粒子 1 のスピン状態が  $|+\rangle$ 、粒子 2 のスピン状態が  $|-\rangle$  のとき、束縛状態の合成スピン状態を  $|+\rangle \otimes |-\rangle$  又は  $|+\rangle |-\rangle$  と表すことにする。なお、合成スピン状態が  $j=1, m=1$  の場合は、 $|1, 1\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle$  と表される。

- (4) この束縛状態について、合成スピン 1 の規格化された固有状態  $|1, 0\rangle$ 、及び合成スピン 0 の規格化された固有状態  $|0, 0\rangle$  を求めよ。

(5) (4)の固有状態  $|0, 0\rangle$  におけるスピン演算子  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{S} \otimes \mathbf{b} \cdot \mathbf{S}$  の期待値

$$\langle 0, 0 | \mathbf{a} \cdot \mathbf{S} \otimes \mathbf{b} \cdot \mathbf{S} | 0, 0 \rangle$$

を求めよ。

ただし、 $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  はそれぞれ定数ベクトルであり、演算子  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{S}$  は粒子 1 のスピン状態に作用し、演算子  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{S}$  は粒子 2 のスピン状態に作用する。

なお、 $a_{\pm} = a_x \pm ia_y$  とすると、

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{S} = \frac{1}{2}(a_+ S_- + a_- S_+) + a_z S_z$$

のように表されることを用いてよい。

【No. 11】 気体分子運動論及び自由電子ガスに関する以下の I、II の設問に答えよ。

I. 気体分子運動論に関する以下の問いに答えよ。

直方体の容器の中に気体が閉じ込められており、その温度を  $T$  とする。1 個の気体分子の質量を  $m$ 、単位体積当たりの気体分子の個数を  $n$  とする。気体分子は容器壁と弾性衝突するものとする。

ボルツマン統計によると、1 個の気体分子がエネルギー  $E$  をとる確率は、 $e^{-\frac{E}{k_B T}}$  に比例する。ここで、 $k_B$  はボルツマン定数である。したがって、分子のエネルギーが運動エネルギーのみとすると、 $(x, y, z)$  座標系において、1 個の気体分子の速度が、 $(v_x, v_y, v_z)$  と  $(v_x + dv_x, v_y + dv_y, v_z + dv_z)$  の間にある確率は次で表される。

$$f(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z = A \exp\left[-\frac{m}{2k_B T}(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)\right]dv_x dv_y dv_z \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

ここで、 $A$  は定数である。

なお、必要に応じて、次の定積分の値を用いてよい。ここで、 $\alpha > 0$  とする。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx &= \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, & \int_0^{\infty} x e^{-\alpha x^2} dx &= \frac{1}{2\alpha}, & \int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} \\ \int_0^{\infty} x^3 e^{-\alpha x^2} dx &= \frac{1}{2\alpha^2}, & \int_0^{\infty} x^4 e^{-\alpha x^2} dx &= \frac{3}{8} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^5}} \end{aligned}$$

(1) 式①の定数  $A$  を、次の規格化条件から求めよ。

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} f(v_x, v_y, v_z)dv_x dv_y dv_z = 1$$

(2) 式①から、1 個の気体分子の速さが、 $v$  と  $v + dv$  の間にある確率を求めよ。

(3) (2)の結果を用いて、分子の平均の速さ及び分子の平均運動エネルギーを求めよ。

(4) 式①を用いて、気体を封入している容器の壁の単位面積当たりに単位時間に衝突する分子数を求めよ。

(5) 気体の圧力は、気体分子が容器壁と衝突して反射するときの力積から生じる。式①を用いて気体の圧力を求めよ。

II. 自由電子ガス系に関する以下の問いに答えよ。

金属内の自由電子を 3 次元自由電子ガス系とみなし、温度  $T$  において電子がエネルギー  $E$  の状態を占有する確率  $f(E, T)$  を求める。

- (1) 次の記述の ㉑ ~ ㉓ に当てはまる適当な語句又は数式を示せ。ただし、㉔、㉕、㉖ については計算過程も示せ。

「一般に、自由エネルギー  $F$  は、内部エネルギー  $U$  とエントロピー  $S$  及び温度  $T$  を用いて、

$$F = \text{㉑}$$

と表される。

3 次元自由電子ガス系の  $i$  番目のエネルギー準位を  $E_i$ 、その準位の縮退度を  $g_i$ 、その準位を占有している電子の個数を  $n_i$  とする。このとき、 $U$  は

$$U = \sum_i n_i E_i$$

と表される。一方、3 次元自由電子ガス系では、同じエネルギー  $E_i$  をもって異なる方向に運動している電子が多数存在するので、縮退度  $g_i$  及び電子の個数  $n_i$  は 1 よりはるかに大きい数となる。また、電子はフェルミ粒子なので、スピン状態も考慮して同じ状態には 0 個又は 1 個の電子しか入れないので  $g_i \geq n_i$  である。よって、 $g_i$  個の状態に  $n_i$  個の電子を 1 個ずつ分配する場合の数(状態数)  $w_i$  は ㉒ となる。よって、全てのエネルギー準位を考えると、状態数の総数  $W$  は  $w_i$  の積となるので

$$W = \prod_i w_i$$

と表される。一方、一般に、エントロピー  $S$  は、 $W$  とボルツマン定数  $k_B$  を用いて、

$$S = \text{㉓}$$

と表される。

ここで、前述のように  $n_i$  と  $g_i$  は共に 1 に比べて十分大きな数なので、 $n \gg 1$  のときに成り立つ Stirling の近似式  $\ln n! \cong n \cdot \ln n - n$  を用いると、エントロピー  $S$  は、 $n_i$  と  $g_i$  を用いて、

$$S = \text{㉔}$$

と表される。このように求めた  $U$  及び  $S$  を用いて、自由エネルギー  $F$  は  $n_i$  と  $g_i$  を用いて表される。

一方、化学ポテンシャル  $\mu$  は、自由エネルギー  $F$  の電子数  $n_i$  による微分

$$\mu = \frac{\partial F}{\partial n_i}$$

で求められるため、

$$\mu = \text{㉕}$$

と表される。これを  $n_i$  について解くと、 $\mu$  をパラメータとして  $n_i = g_i \cdot f(E_i, T)$  の形に表される。よって、エネルギー  $E_i$  の状態が占有される確率  $f(E_i, T)$  は、

$$f(E_i, T) = \text{㉖}$$

と求められる。これは ㉗ 分布関数と呼ばれる。」

- (2) (1) カ で求めた分布関数  $f(E, T)$  の絶対零度及び有限温度での概形を、それぞれエネルギー  $E$  に対するグラフとして描くとともに、その特徴を述べよ。



(下書き用紙)





【No. 12】 地球物理学に関する以下の I、II の設問に答えよ。

I. 中緯度帯の大規模な波動 擾乱<sup>じょうらん</sup>に対して、風の場合と高度場の間には近似的に地衡風の関係が成り立つ。この二つの場が平衡状態にない場合、風の場合と高度場の間で相互調節が行われ、地衡風平衡の状態へ至る。これを大気の地衡風調節という。ここでは、浅水方程式系における地衡風調節の過程を考える。東向きを  $x$  方向、北向きを  $y$  方向とすると、 $x$ 、 $y$  方向の運動方程式と流体層の厚さに関する方程式はそれぞれ次のようになっている。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv = -g \frac{\partial h}{\partial x} \quad \dots\dots ①$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu = -g \frac{\partial h}{\partial y} \quad \dots\dots ②$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hu) + \frac{\partial}{\partial y}(hv) = 0 \quad \dots\dots ③$$

ここで、 $t$  は時間、 $u$ 、 $v$  はそれぞれ  $x$ 、 $y$  方向の風速、 $f$  はコリオリパラメータ、 $g$  は重力加速度の大きさ、 $h$  は流体層の厚さ、 $H$  は流体層の平均的な厚さ、 $\eta = h - H$  は  $h$  の  $H$  からのずれである。この方程式系を従属変数を以下のように基本場  $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{\eta})$  と擾乱場  $(u', v', \eta')$  に分離して、線形化して解くことを考える。

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad \eta = \bar{\eta} + \eta' \quad \dots\dots ④$$

式④を式①、②、③に適用すると、擾乱場についての方程式は式⑤、⑥、⑦で表される。ただし、 $f$  を一定、 $\bar{u} = \bar{v} = 0$ 、 $\bar{\eta} = 0$ 、 $H = \text{一定}$  となる基本場を仮定し、擾乱場どうしの積は非常に小さく、無視できるものとする。

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - fv' = -g \frac{\partial \eta'}{\partial x} \quad \dots\dots ⑤$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + fu' = -g \frac{\partial \eta'}{\partial y} \quad \dots\dots ⑥$$

$$\frac{\partial \eta'}{\partial t} + H \left( \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} \right) = 0 \quad \dots\dots ⑦$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 式⑤を導け。
- (2) 渦度  $\zeta' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}$  の時間発展を決める渦度方程式を導け。
- (3) ポテンシャル渦度  $Q' = \zeta' - \frac{f\eta'}{H}$  が保存されることを示せ。

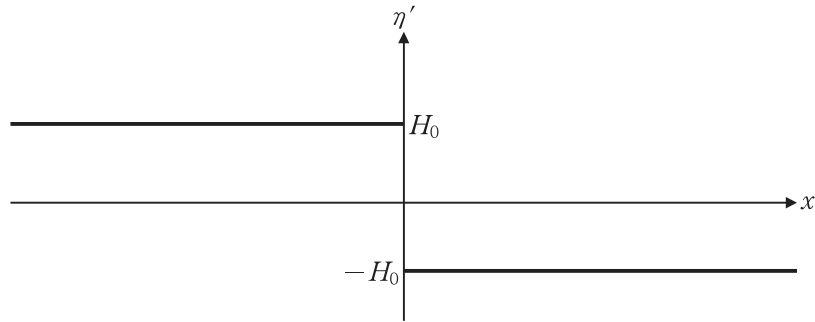
次に、図のような自由表面の初期状態を考える。

風の場合と高度場の間が地衡風平衡でない初期状態(静止大気)から地衡風調節により、どのような地衡風平衡状態が実現されるかを考える。初期条件は、 $H_0$  を定数とし、以下の式で与えられる。

$$u' = v' = 0, \quad \eta' = -H_0 \operatorname{sgn}(x)$$

ここで、符号関数  $\operatorname{sgn}$  は以下で定義される。

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$



このとき、ポテンシャル渦度の初期値  $Q'(x, y, 0)$  は

$$Q'(x, y, 0) = \frac{fH_0}{H} \operatorname{sgn}(x) \quad \dots\dots ⑧$$

となる。

ポテンシャル渦度が保存量であることから、

$$Q'(x, y, t) = Q'(x, y, 0) \quad \dots\dots ⑨$$

であり、式⑧、⑨より、

$$Q'(x, y, t) = \zeta' - \frac{f\eta'}{H} = Q'(x, y, 0) = \frac{fH_0}{H} \operatorname{sgn}(x) \quad \dots\dots ⑩$$

と表される。

ここで、式⑤、⑥、⑦から  $u'$ 、 $v'$  を削除して  $\eta'$  の式にすると

$$\frac{\partial^2 \eta'}{\partial t^2} = H \left\{ g \left( \frac{\partial^2 \eta'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta'}{\partial y^2} \right) - f \zeta' \right\} \quad \dots\dots ⑪$$

が得られる。 $\eta'$  の初期値は  $y$  に依存しないので、地衡風平衡に達した状態における  $\eta'$  を決定する式は、式⑩、⑪より

$$\frac{\partial^2 \eta'}{\partial x^2} - \frac{\eta'}{\lambda^2} = \frac{H_0}{\lambda^2} \operatorname{sgn}(x) \quad \dots\dots ⑫$$

と表すことができる。ここで、 $\lambda$  はロスビーの変形半径であり、 $\lambda = \frac{\sqrt{gH}}{f}$  とする。

- (4) 式⑫を導け。
- (5)  $x = \pm\infty$  において  $\eta'$  が有限な値をもつことと、 $x = 0$  における境界条件に注意して、式⑫の解を求めよ。
- (6) 地衡風平衡状態の風の間  $u'$ ,  $v'$  を求めよ。
- (7)  $\eta'$  を高度場とみなすと、地衡風調節の結果、地衡風平衡状態の風の間と高度場は、ロスビーの変形半径の大きさに依存する。これを踏まえて、低緯度と高緯度での  $\eta'$  のそれぞれの特徴が分かるように、地衡風平衡状態の  $\eta'$  の概形を、横軸を  $x$ 、縦軸を  $\eta'$  として描け。また、この概形から、風の間と高度場が初期場からどのように相互調整されて地衡風平衡状態になるかを 5 行程度で説明せよ。

II. 大気下層の運動を考える。大気境界層は地面摩擦の影響を強く受ける接地境界層、その上はエクマン境界層と呼ばれる。 $x$  方向を東向き、 $y$  方向を北向き、 $z$  方向を鉛直上向きとすると、風ベクトルの東西成分  $u$ 、南北成分  $v$  に関する運動方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}(u) + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(uv) + \frac{\partial}{\partial z}(uw) = fv - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \dots\dots(13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(v) + \frac{\partial}{\partial x}(uv) + \frac{\partial}{\partial y}(v^2) + \frac{\partial}{\partial z}(vw) = -fu - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \dots\dots(14)$$

とする。ここで、 $t$  は時間、 $w$  は鉛直風速、 $p$  は気圧であり、コリオリパラメータ  $f$  と密度  $\rho$  は一定とする。いま、 $u$ 、 $v$ 、 $w$ 、 $p$  を次式のように平均成分(バーで示される量)と変動成分(ダッシュで示される量)の和で表すことを考える。

$$A = \bar{A} + A'$$

平均成分とは、ある期間について平均した物理量を表し、変動成分とは、平均成分からの偏差を表す。すなわち、 $\bar{A}' = 0$  であるから、以下が成り立つ。

$$\overline{AB} = \bar{A}\bar{B} + \overline{A'B'}$$

この平均操作を式⑬、⑭に適用すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{u}\bar{w}) = f\bar{v} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\overline{u'u'}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{u'w'}) \right] \quad \dots\dots(15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{v}^2) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{v}\bar{w}) = -f\bar{u} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \left[ \frac{\partial}{\partial x}(\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{v'v'}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{v'w'}) \right] \quad \dots\dots(16)$$

が得られる。 $K$  を渦粘性係数として、以下の式が成り立つものとする。

$$-\overline{u'w'} = K \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

さらに、式⑮、⑯に対して、 $K$  と水平気圧傾度力は  $z$  によらず一定とし、その他三つの近似を行うことで、エクマン境界層における運動方程式は

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - f\bar{v} - K \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots(17)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + f\bar{u} - K \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots(18)$$

と表される。地表面摩擦が効かないような自由大気中では、以下の地衡風 ( $u_g, v_g$ ) の式が成り立つものとする。

$$u_g = -\frac{1}{\rho f} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}, \quad v_g = \frac{1}{\rho f} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \quad \dots\dots(19)$$

式⑲を式⑰、⑱に代入することで、

$$K \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + f(\bar{v} - v_g) = 0 \quad \dots\dots(20)$$

$$K \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} - f(\bar{u} - u_g) = 0 \quad \dots\dots(21)$$

が得られる。この二つの微分方程式を解くために、式⑲の両辺に虚数単位  $i$  を乗じて、式⑳に加えると、 $\bar{u} + i\bar{v}$  についての常微分方程式が得られる。以下では、地衡風は東西方向に吹いており ( $v_g = 0$ )、高さによらず一定であると仮定する。このとき、一般解は、

$$\bar{u} + i\bar{v} = C_1 \exp\left(\frac{1+i}{\gamma}z\right) + C_2 \exp\left(-\frac{1+i}{\gamma}z\right) + u_g \quad \dots\dots\textcircled{22}$$

となる。ここで、 $\frac{1}{\gamma} = \sqrt{\frac{f}{2K}}$  である。

以下の問いに答えよ。

- (1) 式⑮を導け。
- (2) 式⑮から式⑰を導くために行われた、その他三つの近似について、どのような仮定をすることとで式⑮のどの項を無視したのか、それぞれ述べよ。
- (3) 以下の境界条件を用いて、式⑳に含まれる定数  $C_1$ ,  $C_2$ 、及び、 $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  を求めよ。
  - ・  $z \rightarrow \infty$  で、 $\bar{u} = u_g$ ,  $\bar{v} = v_g = 0$
  - ・  $z \rightarrow 0$  で、 $\bar{u} = 0$ ,  $\bar{v} = 0$
- (4) (3)で求めた  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  から、 $\bar{u}$  が初めに  $u_g$  と平行かつ  $\bar{u} \approx u_g$  となる高さ  $D$  (エクマン境界層の厚さ) を求めよ。
- (5) 連続の式である以下の式㉓を用いて、 $D$  での鉛直風速  $w_D$  を式㉔で見積もることができることを示せ。ただし、エクマン境界層下端は  $z = 0$  とする。

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\textcircled{23}$$

$$w_D = -\frac{\partial u_g}{\partial y} \int_0^D \exp\left(-\frac{z}{\gamma}\right) \sin\left(\frac{z}{\gamma}\right) dz \quad \dots\dots\textcircled{24}$$

- (6) エクマン境界層の下端から上端までの南北成分の質量輸送  $M$  を求め、式㉔と  $M$  はどのような関係となるかを、式を使って示せ。また、式の物理的な意味を 2 ～ 4 行で説明せよ。

【No. 13】 地球物理学に関する以下の I、II の設問に答えよ。

I. デカルト座標系  $(x_1, x_2, x_3)$  で、密度  $\rho$ 、ラメの定数  $\lambda, \mu$  の均質な弾性体中での波の伝搬を考える。位置  $\mathbf{x}$ 、時刻  $t$  の関数である力  $\mathbf{f}$  と変位  $\mathbf{u}$  の関係は、次のような、弾性体の基礎方程式であるナビエ・ストークスの方程式で与えられる。

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{f} + (\lambda + 2\mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \mu \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} \quad \dots\dots ①$$

原点に、単位ベクトル  $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$  の方向に、時間によって変化する大きさ  $F(t)$  をもつ力を作用させたとき、 $\mathbf{f}$  はあるスカラー関数  $\Phi$  とベクトル関数  $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Omega}$  を用いて、

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}) F(t) \mathbf{a} = \nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \nabla \Phi + \nabla \times \boldsymbol{\Omega} \quad \dots\dots ②$$

と表される。ここで、 $\delta(\mathbf{x})$  はデルタ関数である。このときの  $\Phi$  と  $\boldsymbol{\Omega}$  は、

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{F(t)}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \quad \dots\dots ③$$

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{x}, t) = \frac{F(t)}{4\pi} \left( 0, \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{1}{|\mathbf{x}|}, -\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) \quad \dots\dots ④$$

となる。さらに、あるスカラー関数  $\phi$  とベクトル関数  $\boldsymbol{\psi}$  を用いて、

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi} \quad \dots\dots ⑤$$

と置くと、 $\alpha, \beta$  を適当な実定数として、以下の二つの波動方程式が導かれる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\Phi}{\rho} + \alpha^2 \nabla^2 \phi \quad \dots\dots ⑥$$

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{\psi}}{\partial t^2} = \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\rho} + \beta^2 \nabla^2 \boldsymbol{\psi} \quad \dots\dots ⑦$$

式⑤から、式②のように力  $\mathbf{f}$  が与えられたときの  $\phi$  は次のように求まる。

$$\phi(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right) \int_0^{\frac{|\mathbf{x}|}{\alpha}} \tau F(t - \tau) d\tau \quad \dots\dots ⑧$$

ここで、 $\tau$  は遅延時間である。

以下の問いに答えよ。

(1) 次の式が成り立つことを示せ。

$$\nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) - \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\omega})$$

(2) デルタ関数  $\delta(\mathbf{x})$  が、

$$\delta(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left( \frac{1}{|\mathbf{x}|} \right)$$

と記述できることを利用して、式②から式③、④を導け。

(3) 式①、②、⑤から、式⑥、⑦を導け。また、 $\alpha, \beta$  を、それぞれ  $\lambda, \mu, \rho$  のうち必要なものを用いて表せ。

(4) 震源から放出された波は、式⑥で示されるその波面と垂直に振動する波(P波)と、式⑦で示される波面上で振動する波(S波)に分離することができる。式⑧が成り立つことを踏まえ、P波の変位を式で示せ。また、震源から十分に離れた領域でP波はどのような振幅分布をもつか3～5行で説明せよ。

II. 深さ  $z$  方向の一次元の熱伝導を考えると、熱拡散率を  $\alpha$  として、温度  $T$  は次のような熱伝導方程式に従う。以下の問いに答えよ。

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad \dots\dots ⑨$$

(1) 時刻  $t = 0$  における温度分布  $f(z)$  が与えられるとき、この微分方程式の解が以下のようになることを示せ。

$$T = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(\xi-z)^2}{4\alpha t}} d\xi \quad \dots\dots ⑩$$

必要であれば、以下のフーリエ積分を用いてよい。

$$f(x) = \int_0^{\infty} [B(\gamma)\cos\gamma x + C(\gamma)\sin\gamma x] d\gamma$$

$$B(\gamma) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos\gamma\xi d\xi$$

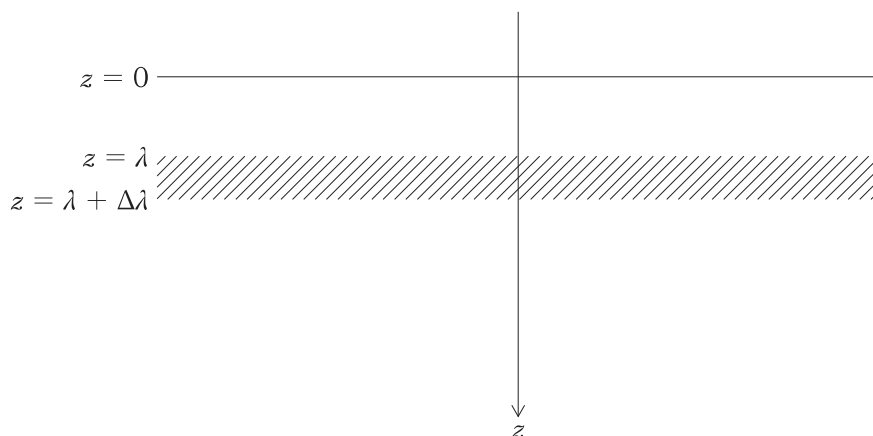
$$C(\gamma) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin\gamma\xi d\xi$$

次に、比熱  $c$ 、密度  $\rho$  の一様な無限媒質中のある面に、 $F(t)$  で表される温度変化を与えたときの媒質内の温度変化を考える。

$t = 0$  に、図のように、 $z = \lambda$  から  $z = \lambda + \Delta\lambda$  の間にある領域に、単位面積当たり  $Q$  の熱を瞬間的に加えると、この領域内の温度が

$$f(z) = \frac{S}{\Delta\lambda} \quad (\lambda < z < \lambda + \Delta\lambda) \quad \dots\dots ⑪$$

になったとする。ここで、 $S$  は熱源の強さである。



(2)  $S$  を、 $Q$ ,  $c$ ,  $\rho$  を用いて表せ。

(3)  $t = 0$  で、式⑪の温度分布（領域外では  $T = 0$ ）であったとき、式⑩を用いて時間  $t$  が経過したときの  $z$  軸に沿った温度分布を求めよ。また、この温度分布の概形を描け。ただし、領域は媒質中にあり、十分に薄いものとする。

このような瞬間的に発生する熱源として、断層面での摩擦熱を考える。摩擦熱によって生じる温度異常を測定することで、地震時の摩擦係数を求めることができる。

- (4) せん断応力  $\tau$  が作用する中で、断層が  $u$  だけ変位したとすると、 $S$  を  $\tau$ ,  $u$ ,  $c$ ,  $\rho$  を用いて表せ。ただし、摩擦による仕事が全て熱に変わり、断層の変位は十分短い時間で起こるものとする。
- (5) ある深さ  $h$  での垂直応力  $\sigma$  を  $h$  と重力加速度の大きさ  $g$  を用いて表せ。
- (6) この地震が発生してから 800 日後に、深さ 1 km にある断層での温度異常が  $0.05^{\circ}\text{C}$  であった。この断層に作用する法線応力は垂直応力に等しいとすると、地震発生時の摩擦係数を有効数字 1 桁で求めよ。ここで、断層の変位は  $5[\text{m}]$ 、 $\alpha = 3.6 \times 10^{-7}[\text{m}^2/\text{s}]$ 、 $\rho = 2200[\text{kg}/\text{m}^3]$ 、 $c = 1700[\text{J}/(\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C})]$  であるものとする。

【No. 14】 地質学に関する以下のⅠ、Ⅱの設問に答えよ。

Ⅰ. 古生物学に関する以下の問いに答えよ。

- (1) 図Ⅰと図Ⅱは、それぞれ海生動物の多様性(科の数)の時代による変化を示したグラフと陸上植物の花粉と孢子の出現頻度の時代による変化を示したグラフである。

現在、著作権者等への許諾手続中です。

- (a) 図Ⅲにおける化石の写真 A, B, C の中から、図Ⅰのカンブリア紀型動物群に属するものを一つ選び、その化石を含む分類群の名称及び化石そのものの形態の特徴について、合わせて 1 ～ 2 行で説明せよ。

現在、著作権者等への許諾手続中です。

- (b) 「カンブリア爆発」(「カンブリア紀の爆発」)とは、どのような現象であったか。関連する生物の具体的な特徴もいくつか例として挙げつつ、2 ～ 3 行で説明せよ。
- (c) 図Ⅰの中で①～⑤が指し示している谷は、どのような生物学的現象を表しているか。現象の名称を答えよ。
- (d) 図Ⅱからは、白亜紀中頃に、それまで繁栄していた植物に代わり被子植物が優占的になってきた過程が読み取れる。この入れ代わりの過程と、図Ⅰにおける海洋での古生代型動物群と現代型動物群の入れ代わりの要因にはどのような違いが考えられるか。図Ⅰ中の①～⑤のうち必要な番号を用いて、3 ～ 5 行で説明せよ。

(2) 脊椎動物の進化に関する以下の問いに答えよ。

- (a) 図Ⅳは、ジュラ紀の地層から発見された最も原始的な鳥類の化石である。体の特徴を観察すると、鳥類の祖先である恐竜と現生の鳥類の特徴をあわせ持っていることが分かる。この動物の名称と、この動物にみられる恐竜の特徴 2 点について、合わせて 1 ～ 2 行で説明せよ。

現在、著作権者等への許諾手続中です。

- (b) 魚類から陸上脊椎動物への進化に関して、中期デボン紀の地層から、ヒレではなく指の形を残した足跡化石が発見されており、指を持つ脊椎動物として最古の化石記録となっている。いくつかの堆積構造を証拠として、この足跡化石は、海底や湖底などではなく、少なくとも一時的に干上がるような浅瀬に付けられたものであったと推定されている。その堆積構造としてどのようなものが考えられるか。その一つの例について、1 行で簡潔に説明せよ。

(3) 化石の保存に関する以下の問いに答えよ。

- (a) 地層中の化石の保存状態は、自生と他生に分けられる。自生と他生の定義について、合わせて 2 行程度で説明せよ。
- (b) 二枚貝の化石について自生であるか他生であるかを推定する際に、最初に着目すべき特徴は何か。その特徴が自生、他生のどちらに当てはまるかを明確に述べつつ、2 行程度で説明せよ。
- (c) 広義に「化石鉱脈(Lagerstätte, ラーガシュテッテ)」として知られるものには二つのタイプがあり、その一つは、ボーンベッド(骨密集層)のように豊富に化石を含む地層を指す。もう一つのタイプはどのような地層を指すか。1 ～ 2 行で説明せよ。
- (d) (c)で答えた化石鉱脈について、代表的な地層の名称とその地質年代(紀)を答えよ。

II. 活断層に関する以下の問いに答えよ。

(1) 図Vは、横ずれ断層変位地形の模式図である。また、灰色部■は水域を示している。

現在、著作権者等への許諾手続中です。

- (a) 図中の㊶～㊸それぞれの断層変位に関連した地形の名称を答えよ。また、その成因をそれぞれ2行程度で説明せよ。
- (b) この断層のずれが左横ずれか右横ずれか答えよ。
- (c) 3か所の地形①、②、③と対比される地形を、それぞれA～Iの中から一つ選べ。また、①、②、③それぞれについて対比した地形的特徴を用いて、断層のずれの成分に関する(b)の判断理由を、それぞれ2行程度で説明せよ。

(2) 図VIは、段丘面区分図である。それぞれの面の標準的な標高は図中に EL.○ m として示している。また、横線部は崖を示している。

それぞれの段丘の構成層は A 面が 6,000 年前、B 面は 2 万年前、C 面は 5 万年前であることが分かっている。崖の水平のずれは図中に示した距離とする。

現在、著作権者等への許諾手続中です。

- (a) A 面、B 面、C 面それぞれが断層によってずれているが、それぞれの垂直・水平の変位量を答えよ。
- (b) 平均変位量から読み取ることができる断層の活動性について、3～6行で説明せよ。

- (3) 図Ⅶは、活断層のトレンチ壁面のスケッチである。このトレンチ壁面には断層 A, B, C が観察された。それぞれの断層は連続しないこととする。
- (a) 断層 A, B, C について、このスケッチから分かる最新活動時期が新しい順に並べよ。
- (b) 断層 A, B, C それぞれの活動した時期について、スケッチと堆積年代から分かることをその理由とともに、それぞれ 3 行程度で説明せよ。

現在、著作権者等への許諾手続中です。

【No. 15】 地質学に関する以下の I、II の設問に答えよ。

I. プレートテクトニクスに関する以下の問いに答えよ。

- (1) プレートテクトニクスの基本的な概念と、その結果、地球表層で生じる地質現象について、合わせて 4 行程度で説明せよ。
- (2) 図 I はプレート境界を示したものである。ただし、二重線は海嶺、実線はトランスフォーム断層、三角形を伴う実線は海溝を示すものとする。なお、プレートの相対運動方向は、海嶺と海溝においてはその境界に垂直、トランスフォーム断層においては平行とする。ここでは、プレートは平板で変形しないものと仮定する。

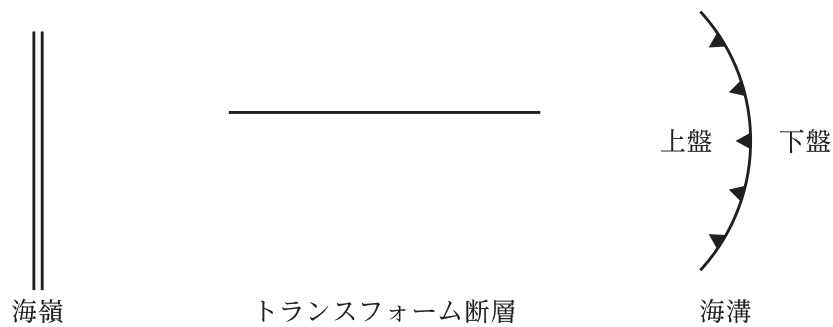


図 I

- (a) 図 II の A, B, C それぞれの場合において、トランスフォーム断層の長さは、時間の経過とともにどのように変化するか述べよ。

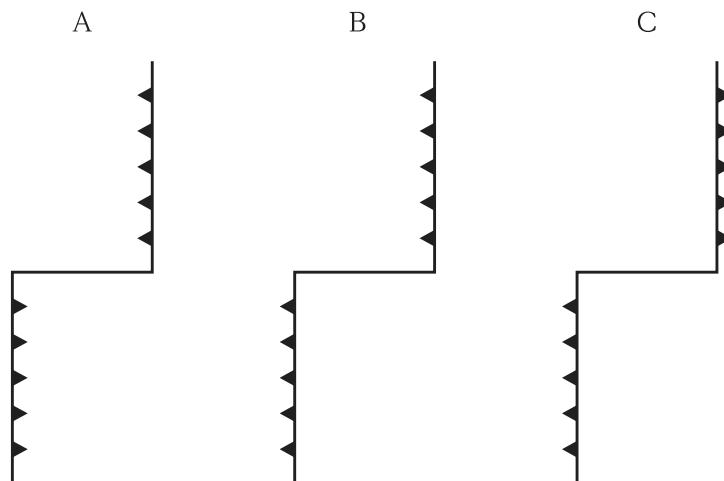
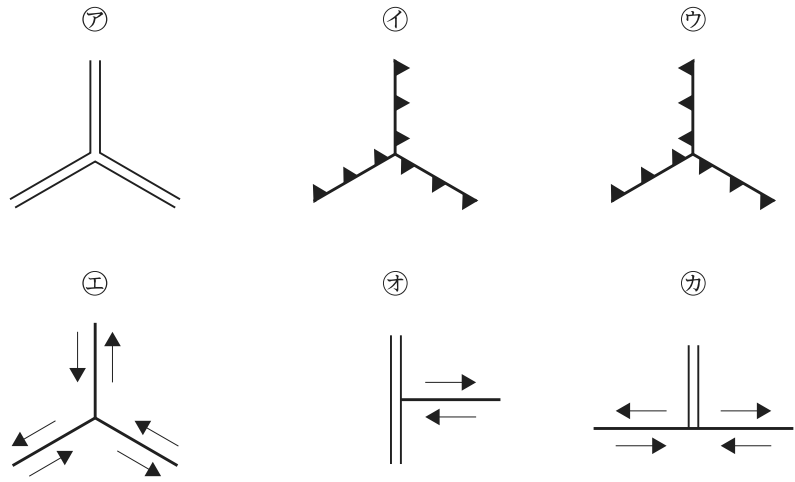


図 II

(b) 図Ⅲの㉗～㉙の中から、三つのプレート境界が交わっている点である三重会合点の配置状況が、時間とともに不変であるものを全て選べ。ただし、海嶺では両側の拡大速度は等しく、トランスフォーム断層では矢印がプレートの相対運動方向を表すものとする。

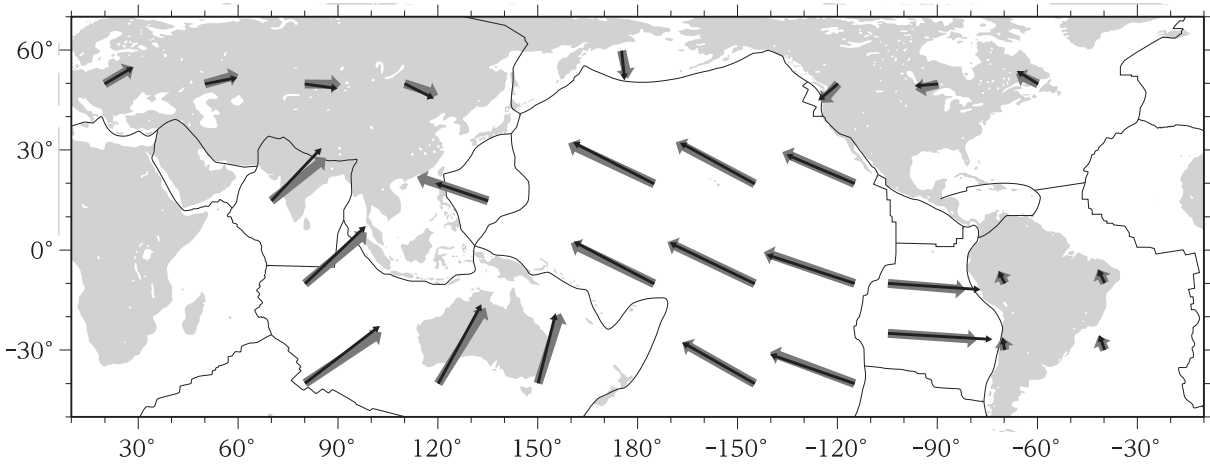


図Ⅲ

(3) 1980年代以降、GNSS(全球測位衛星システム)やVLBI(超長基線電波干渉計)などの宇宙からの測地観測により、現在のプレート運動を直接観測することが可能になった。

(a) それ以前にはどのような方法でプレート運動が決められていたかについて、12行程度で説明せよ。

(b) 図Ⅳにおいて、黒色の矢印は(a)の宇宙からの測地観測以前の方法で推定されたプレート絶対運動である。また、灰色の矢印は宇宙測地観測によるプレート絶対運動である。これらの比較より得られる解釈について、3行程度で説明せよ。なお、実線はプレート境界を示す。



図Ⅳ

(注) GAGE Plate Motion Calculator を基に作図

- (4) 図Vは、沈み込むスラブにおけるオリビンの相転移と分解を示す。破線はスラブ、細線は等温線、斜線はオリビン( $\alpha$ )→ウォズリアイト( $\beta$ )→リングウッドイト( $\gamma$ )相転移の起こる二相共存領域の深さ、太実線はリングウッドイト( $\gamma$ )→ブリッジマナイト(Bdm) + フェロペリクレス(Per)分解の起こる深さを示す。

約 410 km と約 660 km の深さにおける、クラペイロン勾配の正負とそれがスラブの沈み込みに与える影響について、合わせて 5 行程度で説明せよ。

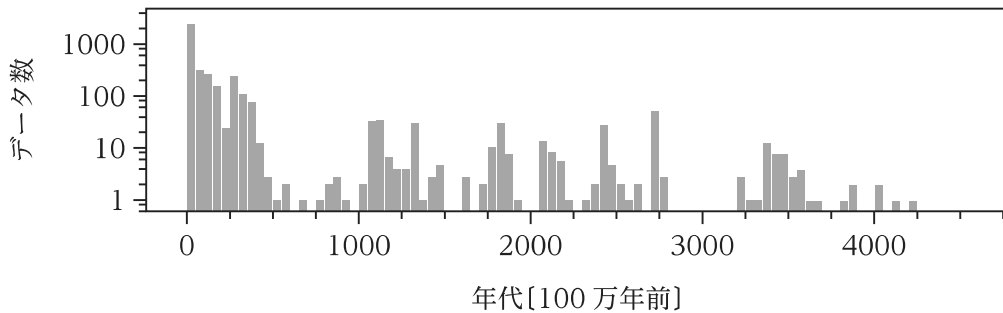
現在、著作権者等への許諾手続中です。

- (5) 地球型固体惑星においては、周回軌道上の探査機によってどのような観測結果が得られれば、プレートテクトニクスが作用しているかどうかを推測できるかについて、5 行程度で説明せよ。

II. 地球の磁場と隕石衝突に関する以下の問いに答えよ。

(1) 火成岩や堆積岩は、その生成時に地球磁場の方向に磁化され、当時の地磁気を現在まで保持している。この残留磁気を測定すれば、岩石生成当時の地球磁場の方向や強さを推定できる。

(a) 図Ⅵは、地球史を通じた世界の古地磁気データを集約したものである。図から分かるように、約 5 億年前を境に、より古い時代ではそのデータ数が少ない。その理由について、3 行程度で説明せよ。



図Ⅵ

(注) Bono et al. (2022) Geophysical Journal International を基に作図

(b) 近年、40 億年以前の地球磁場記録が復元され、既にその頃、地球磁場は存在し、その強度が現在と同程度であったとする報告がなされた。地球表層環境における地球磁場の存在の重要性について、1 ～ 2 行で説明せよ。

(c) 一般に、深成岩は古地磁気記録の復元に不向きであるとされるが、その理由について、3 行程度で説明せよ。

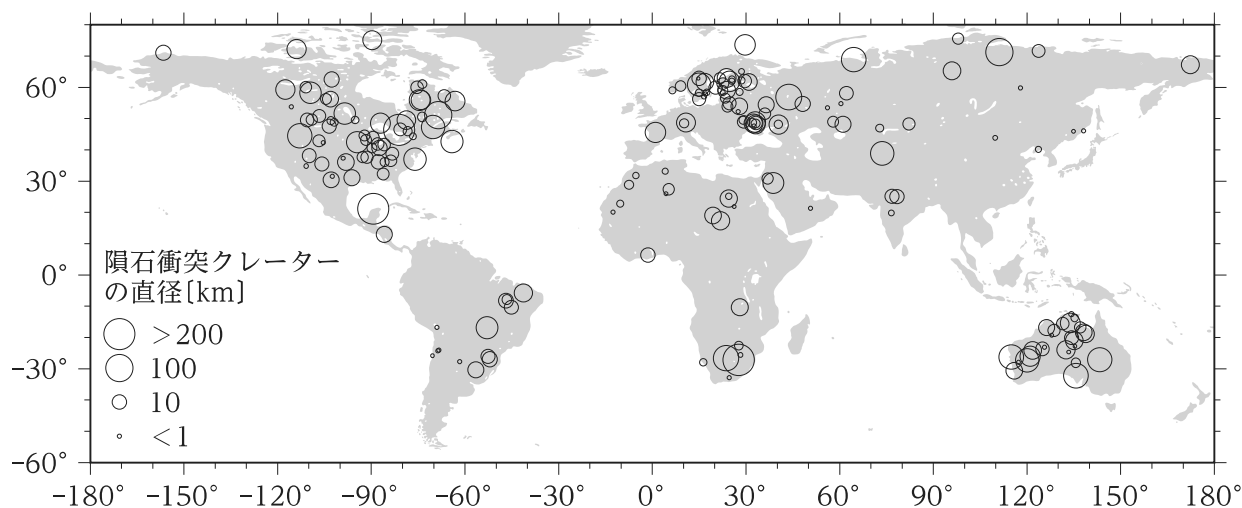
(2) 地球磁場は双極子磁場で近似され、北緯  $x$  度の地表での磁力線の伏角  $I$  は、 $\tan I = 2 \tan x$  で近似される。一方、マグマが冷え固まる途中で、その中に含まれる磁性鉱物は地球の磁場で磁化される。

(a) 北緯 30 度で採取した 3000 万年前の火山岩の残留磁気が北を向いていて、伏角が 60 度であった。このことから推定されるこの火山岩が属するプレートの運動方向は、南・北のいずれであるか答えよ。また、その理由について、5 行程度で説明せよ。ただし、この火山岩の運動はプレート運動による水平移動だけであるとする。

(b) 過去の時代における火山岩の残留磁気の偏角が、現在の地球磁場から期待される値と異なっていた場合、考えられる原因を二つ挙げ、それぞれ 2 行程度で説明せよ。

(3) 地球において、隕石衝突は様々な時代や場所で起きており、その痕跡は様々な形で地質記録に残されている。

(a) 図Ⅶは、これまでに発見された世界の隕石衝突クレーターを示しており、海洋域に少なく、陸域では北米、欧州、オーストラリアに多い。このように隕石クレーターが偏在している理由について、5～10行で説明せよ。



図Ⅶ

(注) Schmieder and Kring (2020) Astrobiology を基に作図

(b) 地球に隕石が衝突した年代はどのように推定されるのか、その手法について3行程度で説明せよ。

(c) 隕石衝突の有力な証拠の一つとして、地層中の「イリジウム濃集層」が知られている。なぜ地層中のイリジウム濃集層の存在が隕石衝突の証拠となるのか、5行程度で説明せよ。ただし、次の語句を全て用い、解答中の用いた語句に下線を引くこと。

[ 語句： コア、分配、強親鉄性元素 ]

### 科目別構成の詳細

| 科 目                    | 出 題 数 | 問 題 番 号           | ペ ー ジ   |
|------------------------|-------|-------------------|---------|
| 代数、幾何、解析、確率・統計         | 5 題   | No. <b>1 ~ 5</b>  | 1 ~ 6   |
| 情報科学                   | 1 題   | No. <b>6</b>      | 7 ~ 8   |
| 数学モデル                  | 1 題   | No. <b>7</b>      | 9 ~ 10  |
| 経営工学(経営数学・生産管理・品質管理)   | 1 題   | No. <b>8</b>      | 11 ~ 12 |
| 古典物理学、現代物理学(物性物理学を含む。) | 3 題   | No. <b>9 ~ 11</b> | 13 ~ 21 |
| 地球物理学                  | 2 題   | No. <b>12, 13</b> | 22 ~ 29 |
| 地質学                    | 2 題   | No. <b>14, 15</b> | 30 ~ 40 |

○ **15 題**のうちから**任意の 2 題**を選んで解答してください。

専門(記述式)正誤表

| ページ | 問題番号 | 細部位置   | 誤                                                                                         | 正                                                                                       |
|-----|------|--------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| 11  | 8    | 本文15行目 | $t_k \leftarrow \left( \min_{\underline{x \in R^n}} f(x^k + td^k) \text{の最適解 } t \right)$ | $t_k \leftarrow \left( \min_{\underline{t \in R}} f(x^k + td^k) \text{の最適解 } t \right)$ |
| 12  | 8    | 本文8行目  | $t_k \leftarrow \left( \min_{\underline{x \in R^n}} f(x^k + td^k) \text{の最適解 } t \right)$ | $t_k \leftarrow \left( \min_{\underline{t \in R}} f(x^k + td^k) \text{の最適解 } t \right)$ |