H8─2025─ **数　　学**

学科(記述式)試験問題

注　意　事　項

1．問題は **3 題**で、解答時間は **1 時間 20 分**です。

2．答案用紙の記入について

(ア)　答案は濃くはっきり書き、書き損じた場合は、解答の内容がはっきり分かるように訂正してください。また、答案用紙の表側だけで書ききれないときは、「**裏に続く**」と書いて裏側を使用してください。

(イ)　答案用紙は、表紙を除き **6 枚つづり 1 冊**です。

(ウ)　答案用紙の表紙の各欄にそれぞれ必要事項を記入してください。
〔　　〕―(　　)―［　　　］の欄は〔 H8 〕―(2025)―［**数　学**］と記入してください。

(エ)　答案用紙各枚の右上の(　ページ)欄に上から順にページ数を記入してください。

(オ)　下記のとおり指定されたページを使って解答してください。

【問題番号】	(ページ)
【No.　**1**】	(1 ～ 2)
【No.　**2**】	(3 ～ 4)
【No.　**3**】	(5 ～ 6)

(カ)　答案用紙各枚の左上にある(No.　　)の欄には問題番号を記入してください。

(キ)　試験の公正を害するおそれがありますので、答案用紙の氏名欄以外に氏名その他解答と関係のない事項を記載しないでください。

3．この問題集は、本試験種目終了後に持ち帰りができます。

4．本試験種目の途中で退室する場合は、退室時の問題集の持ち帰りはできませんが、希望する方には後ほど渡します。別途試験官の指示に従ってください。なお、試験時間中に、この問題集を切り取ったり、転記したりしないでください。

5．下欄に受験番号等を記入してください。

第 1 次試験地	受験番号	氏　　　名

指示があるまで中を開いてはいけません。

途中で退室する場合………本試験種目終了後の問題集の持ち帰りを　　　**希望しない**

【No.　1】 関数 $y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が再び微分可能であるとき、$f'(x)$ を微分したものを第2次導関数といい、$f''(x)$ で表す。さらに、$f''(x)$ が再び微分可能であるとき、$f''(x)$ を微分したものを第3次導関数といい、$f'''(x)$ で表す。ここで、$g(x)=\tan x$, $h(x)=\tan(x^2)$ とする。以下の設問に答えよ。

(1) 正接の加法定理を用いて、関数 $y=g(x)$ を導関数の定義に従って微分せよ。なお、三角関数の極限に関する公式 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を用いてよい。

(2) $g'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=4$ であることを示せ。また、$g''\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ を求めよ。

(3) $h'\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\right)=\dfrac{8}{3}\sqrt{3\pi}$ であることを示せ。また、$h''\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\right)$ を求めよ。

(4) $H(x)=h\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\right)+h'\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\right)x+\dfrac{1}{2}h''\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\right)x^2+\dfrac{1}{6}h'''\left(\sqrt{\dfrac{\pi}{3}}\right)x^3$ とする。$H\left(\sqrt{\dfrac{3}{\pi}}\right)$ を求めよ。

【No.　2】 定数 α，β はいずれも 2 以上 9 以下の整数で $\alpha < \beta$ であるとする。この下で、各自然数 n に対して次の 3 つの条件をすべて満たすような正の整数 A_n，B_n を考える。

(i) A_n，B_n はいずれも 10 進法で表すと高々 n 桁である。すなわち、

$$0 < A_n \leqq 10^n - 1, \qquad 0 < B_n \leqq 10^n - 1$$

を満たす。

(ii) A_n^2，B_n^2 を 10^n で割った余りがそれぞれ A_n，B_n に等しい。すなわち、$x = A_n$，B_n としたとき、それぞれの x についてある整数 m が存在して

$$x^2 - x = m \cdot 10^n$$

と表せる。

(iii) A_n，B_n を 10 で割った余りがそれぞれ α，β である。

ここで、a を整数、b を正の整数とし、$\dfrac{a}{b}$ を超えない最大の整数を p としたとき、a を b で割った余りとは $a - bp$ のことを指す。このとき、以下の設問に答えよ。

(1) A_1，B_1 がそれぞれただ一つ存在するような α，β の値の組はただ一通りに定まることを示し、それらの値を求めよ。

以降、α，β は(1)で求めた組の値に固定するものとする。

(2) A_2，B_2 がそれぞれただ一つ存在することを示し、それらの値を求めよ。

(3) A_3 を 100 で割った余りが A_2 であることを示し、さらに、A_3 の値を求めよ。

(4) 任意の自然数 n に対して A_n の値がただ一つ存在することを示せ。

【No.　3】 点 O を中心とする半径 1 の球面上に異なる 2 点 A，B があり、同じく点 O を中心とする半径 2 の球面上に異なる 2 点 C，D がある。ここで、$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とおく。$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$ が成り立っているとき、以下の設問に答えよ。

(1)　2 本の線分 AB，CD が点 O から等しい距離にあることを示せ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$ を示せ。

(3)　4 点 A，B，C，D のうちのどの 3 点も同一直線上に無いとき、$\triangle\mathrm{ABC}\equiv\triangle\mathrm{BAD}$ を示せ。

(4)　$s=\vec{a}\cdot\vec{b}$，$t=\vec{c}\cdot\vec{d}$ とおくとき、以下の問いに答えよ。

(a)　s と t の間に成り立つ関係式を示し、st 平面上に点 $(s,\ t)$ が存在し得る範囲を図示せよ。

(b)　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$ それぞれを s のみを用いて表し、取り得る値の範囲を求めよ。

(c)　4 点 A，B，C，D が同一平面上に無いとする。s の値を固定したときの四面体 ABCD の体積の最大値を s のみを用いて表せ。

(d)　(c)の結果について、さらに s の値を動かし、四面体 ABCD の体積が最大となる s の値を求めよ。