

専門(記述式)試験問題

注 意 事 項

1. 問題は **15 題**あります。このうち**任意の 2 題**を選んで解答してください。なお、この問題集の**裏表紙**に科目別構成の詳細が記載されていますので、解答開始前によく読んでおいてください。
2. 解答時間は **3 時間**です。
3. 答案用紙の記入について
 - (ア) 答案は濃くはっきり書き、書き損じた場合は、解答の内容がはっきり分かるように訂正してください。
 - (イ) 問題 **1 題に 1 枚**(両面)を使用してください。
 - (ウ) 表側の各欄にそれぞれ必要事項を記入してください。
問題番号欄には、解答した問題の番号をそれぞれ記入してください。
 - (エ) 試験の公正を害するおそれがありますので、答案用紙の氏名欄以外に氏名その他解答と関係のない事項を記載しないでください。
4. 下書き用紙はこの問題集の**中央部**にとじ込んであります。**試験官の指示に従って、試験開始後に問題集から下書き用紙だけを慎重に引きはがして**使用してください。なお、誤って問題集を破損しても、問題集の交換はできませんので注意してください。
5. この問題集で単位の明示されていない量については、全て国際単位系(SI)を用いることとします。
6. この問題集は、本試験種目終了後に持ち帰りができます。
7. 本試験種目の途中で退室する場合は、退室時の問題集及び下書き用紙の持ち帰りはできませんが、希望する方には後ほど渡します。別途試験官の指示に従ってください。なお、試験時間中に、この問題集から**下書き用紙以外**を切り取ったり、問題を転記したりしないでください。
8. 下欄に受験番号等を記入してください。

第1次試験地	試験の区分 数理科学・物理・ 地球科学	受験番号	氏 名
--------	---------------------------	------	-----

指示があるまで中を開いてはいけません。

【No. 1】 以下のⅠ、Ⅱ、Ⅲの設問に答えよ。

Ⅰ. n を 2 以上の自然数とし、 n 次実正方行列全体のなすベクトル空間 $M(n, \mathbf{R})$ における線形変換 F を

$$F: M(n, \mathbf{R}) \rightarrow M(n, \mathbf{R})$$

$$X \mapsto X - X^T$$

で定める。ただし、 X^T は行列 X の転置行列を表す。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 任意の n 次実正方行列は、対称行列と交代行列(反対称行列)の和として一意的に書けることを示せ。
- (2) F の固有値及びそれぞれの固有空間の次元を求めよ。

n を 2 以上の自然数とする。また、 B を正則な n 次実正方行列とし、 $M(n, \mathbf{R})$ における線形変換 $G(B)$ を

$$G(B): M(n, \mathbf{R}) \rightarrow M(n, \mathbf{R})$$

$$X \mapsto X - B^{-1}X^TB^T$$

で定める。

- (3) $n = 2$ とする。このとき、 $M(2, \mathbf{R})$ の基底を 1 つ定め、線形変換 $G\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ のその基底に対する表現行列を求めよ。
- (4) 一般に $n \geq 2$ とする。また、正則な n 次実正方行列 B を 1 つ固定する。このとき、線形変換 $G(B)$ の特性多項式 $\Phi(t)$ を求めよ。

II. 以下の問いに答えよ。

- (1) $0 \leq x \leq 1$ ならば $\frac{1}{2}x \leq \log_e(1+x) \leq x$ であることを示せ。
- (2) α を正の実数として、級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \log_e(1+k^{-\alpha})$ が収束する α の範囲を求めよ。
- (3) β を正の実数として、級数 $\sum_{k=1}^{\infty} (k^{-\beta} - \log_e(1+k^{-\beta}))$ が収束する β の範囲を求めよ。

III. 以下の問いに答えよ。

- (1) n を正の整数とする。閉区間 $[0, 1]$ 上の実数値連続関数列 $\{f_n(x)\}_{n=1, 2, \dots}$ であって各点収束するが一様収束しないものの例を挙げ、また実際にその条件を満たすことを証明せよ。
- (2) n を正の整数とする。閉区間 $[0, 1]$ 上の実数値連続関数列 $\{g_n(x)\}_{n=1, 2, \dots}$ であって次の条件を満たすものの例を挙げ、また実際にその条件を満たすことを証明せよ。

条件 関数 $g: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ を各 $x \in [0, 1]$ に対して $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$ と定めたとき、

(a) $g(x)$ は $[0, 1]$ 上の連続関数であり、

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n(x) dx \neq \int_0^1 g(x) dx$ となる。

- (3) n を正の整数とする。閉区間 $[0, 1]$ 上の実数値連続関数列 $\{h_n(x)\}_{n=1, 2, \dots}$ が閉区間 $[0, 1]$ 上の連続関数 $h(x)$ に一様収束するとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 h_n(x) dx = \int_0^1 h(x) dx$$

となることを証明せよ。

- (4) 極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \prod_{k=0}^n \left(\frac{1}{1+x^{2^k}} \right) dx$$

を計算せよ。ただし、解答に際しては、極限と積分の交換についても議論すること。

【No. 2】 以下のⅠ、Ⅱ、Ⅲの設問に答えよ。

Ⅰ. 以下の問いに答えよ。

- (1) 群 G の部分群 H_1, H_2 について、 $H = H_1 \cap H_2$ とする。
 - (a) H が G の部分群となることを示せ。
 - (b) H_1 が G の正規部分群であれば、 H は H_2 の正規部分群となることを示せ。
- (2) 群 G の全ての元の位数が 2 または 1 であるならば、 G は可換群となることを示せ。
- (3) 5 次対称群 S_5 の元で位数 2 のものはいくつあるか。

Ⅱ. $R[x, y]$ を実係数 2 変数多項式環とし、 R, S を単位的可換環とする。また、環準同型写像は単位元を単位元にうつすものとする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\varphi: R \rightarrow S$ を環準同型写像とし、 $M' = \varphi^{-1}(M)$ を S のイデアル M の逆像とする。
 - (a) M' が R のイデアルとなることを示せ。
 - (b) M が S の極大イデアルであっても、 M' が R の極大イデアルとならない例を挙げよ。
 - (c) φ が全射のとき、 M が S の極大イデアルであるなら、 M' が R の極大イデアルとなることを示せ。
- (2) イデアル $I = (4x^3 - x^2 - y^2, x^2 + 2x - y)$ を含む $R[x, y]$ の極大イデアルを全て挙げよ。
- (3) R の全ての極大イデアルの共通部分を J で表し、また、 $a \in R$ とする。このとき、 $a \in J$ であることは、全ての $b \in R$ に対し $1 - ab$ が R の単元であることと同値となることを示せ。ただし、 1 は R の単位元である。

なお、必要であれば、 R 自身ではない R のイデアルに対し、そのイデアルを含むような R の極大イデアルが存在することは用いてよい。

Ⅲ. $\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{-7}$ による有理数体上の拡大を $L = \mathbf{Q}(\alpha)$ とする。また、ガロア拡大 $L/\mathbf{Q}$ のガロア群を $G = \text{Gal}(L/\mathbf{Q})$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1)
 - (a) $\mathbf{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{-7}) = L$ を示せ。
 - (b) α の $\mathbf{Q}$ 上の最小多項式を求めよ。
- (2) 群 G の生成系を与え、 G を決定せよ。
- (3) $L/\mathbf{Q}$ の中間体を全て求めよ。

【No. 3】 以下の I、II の設問に答えよ。

I. $M(2, \mathbf{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbf{R} \right\}$ を 2 次実正方行列全体の集合とする。 $A \in M(2, \mathbf{R})$

に対して、 A^T を A の転置行列とし、 $\det A$ を A の行列式とする。 E を 2 次単位行列とし、
2 次直交群

$$O(2) = \{ A \in M(2, \mathbf{R}) \mid A^T A = E \}$$

を考える。 $O(2) \subset M(2, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^4$ とみなし、 $O(2)$ にユークリッド空間の部分空間としての位相を入れる。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 任意の $A \in O(2)$ に対して $\det A = \pm 1$ であることを示せ。
- (2) $O(2)$ は $M(2, \mathbf{R})$ の有界閉集合であることを示せ。
- (3) $O(2)$ が弧状連結か否か及び連結か否かをそれぞれ述べ、さらにその理由を述べよ。
- (4) $M(2, \mathbf{R}) = \mathbf{R}^4$ とみなし、標準的な C^∞ 級微分可能多様体の構造を入れる。このとき、 $O(2)$ は $M(2, \mathbf{R})$ のコンパクトな C^∞ 級部分多様体であることを示せ。

II. ホモロジー群に関する以下の問いに答えよ。

- (1) 単体分割を用いて円周 S^1 の 1 次整係数ホモロジー群 $H_1(S^1; \mathbf{Z})$ を求めよ。
- (2) 単体分割を用いて閉円板 D^2 の 1 次整係数ホモロジー群 $H_1(D^2; \mathbf{Z})$ を求めよ。
- (3) 2 つの円周 S^1 が 1 点のみを共有する位相空間 $S^1 \vee S^1$ を X とする。単体分割を用いて X の 1 次整係数ホモロジー群 $H_1(X; \mathbf{Z})$ を求めよ。
- (4) 2 次元トーラス T^2 から、埋め込まれた開円板 $\text{Int} D^2$ を取り除いて得られる位相空間は、(3) の X とホモトピー同値である。このことと(1)、(2)、(3)の結果及びマイヤー・ビートリス完全系列を用いて T^2 の 1 次整係数ホモロジー群 $H_1(T^2; \mathbf{Z})$ を求めよ。

【No. 4】 以下のⅠ、Ⅱの設問に答えよ。

Ⅰ. a, b を実数とし、 $a < b$ とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\mathbf{R}$ 上の任意の非有界な区間に対して、その上で定義された、上に有界でない連続関数があることを示せ。また、 $\mathbf{R}$ 上の任意の有界开区間に対して、その上で定義された、上に有界でない連続関数があることを示せ。
- (2) $\mathbf{R}$ 上の区間で定義された、実数値連続関数 f に対する最大・最小値の定理及び中間値の定理の主張を述べよ。記述においては、定理が成り立つための条件を正確に述べること。
- (3) $\mathbf{R}$ の有界閉区間 $[a, b]$ で定義された実数値連続関数 f に対して、 $f(a) = f(b) = 0$ が成り立っているとする。さらに、开区間 (a, b) において f は一階微分可能とする。このとき、ある $\xi \in (a, b)$ が存在して、 $f'(\xi) = 0$ となることを示せ。なお、必要であれば、(2) で述べた最大・最小値の定理もしくは中間値の定理を用いてよい。
- (4) m を 2 以上の整数とする。 $\mathbf{R}$ の有界閉区間 $[a, b]$ で定義された実数値連続関数 f に対して、 $f(a) = f(b) = 0$ が成り立っているとする。さらに、半开区間 $[a, b)$ において、 f は m 階微分可能とし、 $f^{(k)}(a) = 0$ ($1 \leq k \leq m-1$) とする。ここで、 $f^{(k)}$ は f の k 階微分を表す。このとき、ある $\xi \in (a, b)$ が存在して、 $f^{(m)}(\xi) = 0$ となることを示せ。なお、必要であれば、(3) の結果を用いてよい。また、半开区間 $[a, b)$ 上で定義された実数値関数 f が微分可能であるとは、开区間 (a, b) で微分可能かつ a において右微分可能なこととし、 f の微分は、 $[a, b)$ の各点において微分係数を対応させた関数として定義されるものとする。さらに、 f の高階微分可能性および高階微分は、帰納的に定義されるものとする。
- (5) m を正の整数とする。 $\mathbf{R}$ の有界閉区間 $[a, b]$ で定義された実数値連続関数 f は半开区間 $[a, b)$ において m 階微分可能とする。さらに、実数 M を、 $m = 1$ のとき

$$f(b) = f(a) + M(b - a)$$

を満たすものとして定め、 $m \geq 2$ のとき

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) (b-a)^k + M(b-a)^m$$

を満たすものとして定める。このとき、ある $\xi \in (a, b)$ が存在して、 $M = \frac{1}{m!} f^{(m)}(\xi)$ となることを示せ。なお、必要であれば、(3) 又は (4) の結果を用いてよい。

以降、(5)の結果を一変数のテイラーの定理と呼ぶ。

- (6) $\mathbf{R}$ 上の区間 $[0, \infty)$ 上で定義された実数値関数 g が $g(0) = 1$, $g'(x) = g(x)$ ($x \in [0, \infty)$) を満たしているとする。関数 g に一変数のテイラーの定理を適用することにより、べき級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k \text{ が関数 } g(x) \text{ に } [0, \infty) \text{ 上広義一様収束することを示せ。ここで、} 0! = 1 \text{ とする。}$$

- (7) 以下の等式

$$\beta = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!}$$

で定義される実数 β を考える。右辺が収束することを示し、 β が無理数であることを示せ。

- (8) m を正の整数とし、 f を $\mathbf{R}^n$ の開集合 Ω 上で定義された C^m 級実数値関数とする。また、 x, y を Ω 内の異なる 2 点とし、 x, y を結ぶ線分が Ω 内に含まれているとする。この状況における多変数のテイラーの定理の主張を述べ、さらにその証明を述べよ。ただし、証明に当たっては、関数 $g(t) = f(x + t(y - x))$ ($0 \leq t \leq 1$) に一変数のテイラーの定理を適用すること。

II. 以下の問いに答えよ。

- (1) f, g を $\mathbf{R}^n$ 上のルベーグ可測な、ルベーグ測度に関する実数値二乗可積分関数とすると、積分に関するシュワルツの不等式

$$\left(\int_{\mathbf{R}^n} f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_{\mathbf{R}^n} f(x)^2 dx \cdot \int_{\mathbf{R}^n} g(x)^2 dx$$

が成り立つことを証明せよ。

- (2) m を 2 以上の整数とする。 $f_1, f_2, \dots, f_m$ を $\mathbf{R}^n$ 上のルベーグ可測な、ルベーグ測度に関する実数値二乗可積分関数とすると、 $\int_{\mathbf{R}^n} f_i(x)f_j(x)dx$ を (i, j) 要素とする m 次の行列式 $G(f_1, \dots, f_m)$ をグラム行列式と呼ぶ。このとき、 $G(f_1, \dots, f_m) \geq 0$ となることを示せ。さらに、 $G(f_1, \dots, f_m) = 0$ であるならば、 $f_1, \dots, f_m$ が $\mathbf{R}^n$ 上一次従属となることを示せ。

ただし、 $f_1, \dots, f_m$ が $\mathbf{R}^n$ 上一次従属であるとは、非自明な実定数 $c_1, \dots, c_m$ が存在して、 $\mathbf{R}^n$ 上の関数 $c_1 f_1 + \dots + c_m f_m$ がほとんどいたるところ定数 0 と等しくなることをいう。

【No. 5】 本問では、基礎となる確率空間を (Ω, F, P) とする。確率変数は実数値であるとし、確率変数 W の期待値を $E[W]$ で表す。以下の I ~ IV の設問に答えよ。

I. n を正の整数とし、 p, q を 1 未満の正の実数とする。確率変数 X は二項分布 $B(n, p)$ に従い、さらに、確率変数 Y については、事象 $A_k = \{X = k\}$ の下での条件付き確率分布が二項分布 $B(k, q)$ に従うことが分かっているとき、以下の問いに答えよ。ただし、非負整数 m と 1 未満の正の実数 r に対し、 W が二項分布 $B(m, r)$ に従うとは、

$$P(W = x) = \begin{cases} \frac{m!}{x!(m-x)!} r^x (1-r)^{m-x} & (x = 0, \dots, m) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

であるものとする。ここで、 $0! = 1$ とする。

- (1) 非負整数の組 (k, l) に対して定まる確率 $P(X = k, Y = l)$ を n, k, l 及び 3 つの実数 $s = 1 - p, t = pq, u = p(1 - q)$ を用いて表せ。
- (2) 非負整数 l に対して定まる確率 $P(Y = l)$ を n, l 及び $t = pq$ を用いて表せ。

確率変数 $Z_1, \dots, Z_n$ は同じ確率分布に従う非負整数値確率変数であり、 $X, Z_1, \dots, Z_n$ は独立であるとする。確率変数 W を、事象 A_0 が起きたときは $W = 0$ とし、事象 A_k ($k \geq 1$) が起きたときは $W = Z_1 + \dots + Z_k$ とすることによって定める。 W が二項分布 $B(n, r)$ に従うとき、以下の問いに答えよ。ただし、 $0 < r < p$ であるとする。

- (3) n 以下の正の整数 k に対し、 $Z_1 + \dots + Z_k$ が二項分布に従うことを示せ。
- (4) 各 Z_j の確率分布を求めよ。

II. 右連続関数 $G, H: \mathbf{R} \rightarrow [0, 1]$ が単調非減少かつ $G(0) = H(0) = 0, G(1) = H(1) = 1$ を満たすとする。確率変数 X, Y についての条件(＃)を

任意の実数の組 (x, y) について、 $P(X \leq x) = G(x)$ かつ $P(Y \leq y) = H(y) \dots\dots(＃)$

によって定め、2次元確率変数 (X, Y) の同時分布の分布関数 $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ についての条件(＃＃)を

任意の $x \in [0, 1], y \in [0, 1]$ を満たす実数の組 (x, y) について、 $F(x, y) = G(x)H(y) \dots\dots(＃＃)$ によって定める。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) X, Y が独立であり、かつ、条件(＃)が満たされているとき、条件(＃＃)が満たされることを独立性の定義に基づき示せ。
- (2) 条件(＃＃)が満たされるとき、 $P(0 \leq X \leq 1, 0 \leq Y \leq 1) = 1$ であることを示せ。
- (3) (1)の逆、すなわち、「条件(＃＃)が満たされるならば、 X, Y が独立であり、かつ、条件(＃)が満たされる」の真偽を判定せよ。さらに、真であればそれを示し、偽であれば反例を挙げよ。

Ⅲ. 確率変数 $X_1, X_2, \dots$ が独立であり、いずれも $[0, \infty)$ を台とする同一の連続関数を確率密度関数にもつとする。正の整数 n に対して事象 A_n を

$$A_n = \begin{cases} \Omega & (n = 1) \\ \left\{ \omega \in \Omega \mid X_n(\omega) > \max_{1 \leq k < n} X_k(\omega) \right\} & (n \geq 2) \end{cases}$$

で定めるとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $P(A_n) = \frac{1}{n}$ であることを示せ。
- (2) $A_1, A_2, \dots$ が独立であることを示せ。
- (3) 2 以上の整数 n と正の整数 k に対し、 $P(A_n \cap A_{n+1}^c \cap \dots \cap A_{n+k}^c)$ を求めよ (結果のみでよい)。ただし、 A_j^c は A_j の余事象である。

Ⅳ. 確率変数列 $X_1, X_2, \dots$ が $\lim_{a \rightarrow \infty} \sup_n E[|X_n| 1_{\{|X_n| \geq a\}}] = 0$ を満たすとき、一様可積分であるという。

ここで、 1_A は事象 A が起きたとき 1 で、それ以外るとき 0 となる確率変数である。このとき、

確率変数列 $Y_1, Y_2, \dots$ が一様可積分であれば、 $Z_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k$ により定まる確率変数列 $Z_1, Z_2, \dots$

が一様可積分であることを示せ。なお、必要であれば、 $X_1, X_2, \dots$ が一様可積分であることと、

次の 2 つの条件 (*) 及び (**) が成立することが同値であることを用いてよい。

$$(*) \quad \sup_n E[|X_n|] < \infty$$

$$(**) \quad \text{任意の正の実数 } \varepsilon \text{ に対して、ある正の実数 } \delta \text{ が存在し、事象 } A \text{ が } P(A) < \delta \text{ を満たす限り } \sup_n E[|X_n| 1_A] < \varepsilon$$

【No. 6】 以下のⅠ、Ⅱの設問に答えよ。ただし、 E_p は $p \times p$ の単位行列、 $\mathbf{1}_p$ はすべての要素が 1 の p 次元列ベクトルとする。また、各問を解くに当たり、それまでの問の結果を用いてもよい。

Ⅰ. A, B, C, D をそれぞれ $p \times p, p \times q, q \times p, q \times q$ 行列とし、 $A, D, D^{-1} + CA^{-1}B$ は正則であるとする。さらに、行列 $F = A + BDC$ 、行列 $G = A^{-1} - A^{-1}B(D^{-1} + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$ と定義する。 $FG = GF = E_p$ であることを示せ。

Ⅱ. 国 $1, 2, \dots, L$ に対し、国 i の国 j への輸出額から、国 i の国 j からの輸入額を差し引いた貿易収支を $y_{i,j}$ とし、 $y = (y_{1,2}, y_{1,3}, \dots, y_{1,L}, y_{2,3}, \dots, y_{2,L}, \dots, y_{L-1,L})^T$ とする。ある国 i の国力を r_i ($i = 1, 2, \dots, L$) とし、 $r = (r_1, r_2, \dots, r_L)^T$ を y から推定することを考える。以下の問いに答えよ。

ただし、 T は行列の転置を表す。また、ベクトル z のノルムを $\|z\| = \sqrt{z^T z}$ と定義する。

(1) 2 国間の貿易収支 $y_{i,j}$ ($i < j$) が二つの国の国力の差で近似される、すなわち

$y_{i,j} = r_i - r_j + \epsilon_{i,j}$ であると仮定する。ただし、 $\epsilon_{i,j}$ は近似の誤差を表す未知の変数であり、 $\epsilon = (\epsilon_{1,2}, \epsilon_{1,3}, \dots, \epsilon_{1,L}, \epsilon_{2,3}, \dots, \epsilon_{2,L}, \dots, \epsilon_{L-1,L})^T$ とする。このとき、 X_1 を適当な行列として、二つのベクトル r と y の関係は $y = X_1 r + \epsilon$ で記述される。 $M_1 = X_1^T X_1$ とする。以下の問いに答えよ。

(i) $L = 4$ として $X_1, M_1, \mathbf{1}_L \mathbf{1}_L^T$ を求めよ。

(ii) M_1 を $E_L, \mathbf{1}_L, L$ のうち必要なものを用いて表せ。また、 M_1 の固有値と階数を求めよ。

(iii) ある $\hat{r}_1$ が関数 $\psi_1(r) = \frac{1}{2} \|y - X_1 r\|^2$ の最小解であるとき、 $\hat{r}_1$ が満たすべき条件を $\hat{r}_1, E_L, \mathbf{1}_L, L, X_1, y$ のうち必要なものを用いて表せ。

(iv) (iii)の条件を満たす $\hat{r}_1$ のうち、 $\|\hat{r}_1\|$ が最小となるものを求め、 $E_L, \mathbf{1}_L, L, X_1, y$ のうち必要なものを用いて表せ。

(v) (iii)の条件を満たす $\hat{r}_1$ の一般解を $E_L, \mathbf{1}_L, L, X_1, y$ のうち必要なものを用いて表せ。

(vi) ある $\hat{r}_2$ が関数 $\psi_2(r) = \frac{1}{2} \|y - X_1 r\|^2 + \frac{\lambda}{2} \|r\|^2$ の最小解であるとき、 $\hat{r}_2$ が満たすべき条件を $\hat{r}_2, E_L, \mathbf{1}_L, L, X_1, y, \lambda$ のうち必要なものを用いて表せ。ただし、 λ は非負の実数とする。

(vii) $\hat{r}_2$ が一意に定まるための λ の条件を、理由とともに示せ。また、 λ がその条件を満たすとき、 $\hat{r}_2$ を $E_L, \mathbf{1}_L, L, X_1, y, \lambda$ のうち必要なものを用いて表せ。

(viii) λ を(vii)の範囲で変化させたとき、 $\hat{r}_2$ の各要素の大小関係が変化することがあるか、理由とともに示せ。

(2) 国 i の GDP を g_i ($g_i > 0$) とし、 G を第 i 対角成分が g_i 、非対角成分が 0 の $L \times L$ 対角行列とする。2 国間の貿易収支 $y_{i,j}$ ($i < j$) が $y_{i,j} = g_i r_i - g_j r_j + \epsilon'_{i,j}$ と表されると仮定する。

ただし、 $\epsilon'_{i,j}$ は近似の誤差を表す未知の変数であり、

$\epsilon' = (\epsilon'_{1,2}, \epsilon'_{1,3}, \dots, \epsilon'_{1,L}, \epsilon'_{2,3}, \dots, \epsilon'_{2,L}, \dots, \epsilon'_{L-1,L})^T$ とする。このとき、 X_3 を適当な行列として、二つのベクトル r と y の関係は $y = X_3 r + \epsilon'$ で記述される。 $M_3 = X_3^T X_3$ とする。以下の問いに答えよ。

(i) M_3 を $G, E_L, 1_L, L$ のうち必要なものを用いて表せ。また、 M_3 の階数を求めよ。

(ii) $\hat{r}_3$ を関数 $\psi_3(r) = \frac{1}{2} \|y - X_3 r\|^2$ の最小解とする。このとき、 $\hat{r}_3$ の一般解を $G, E_L, 1_L, L, X_1, y$ のうち必要なものを用いて表せ。また、 $g_1, \dots, g_L$ を変化させたとき、 $\hat{r}_3$ の各要素の大小が変化することはあるか、理由とともに示せ。

(iii) ある $\hat{r}_4$ が関数 $\psi_4(r) = \frac{1}{2} \|y - X_3 r\|^2 + \frac{\lambda}{2} \|r\|^2$ の最小解であるとき、 $\hat{r}_4$ が一意に定まるための λ の条件を理由とともに示せ。ただし、 λ は非負の実数とする。

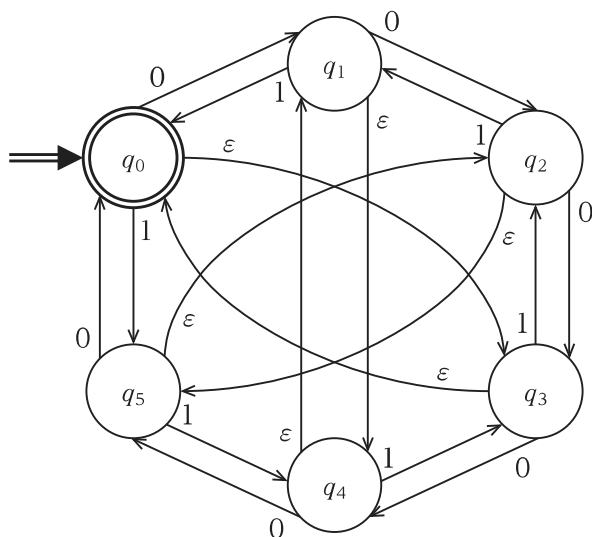
【No. 7】 論理命題と有限オートマトン、ポンピング補題に関する以下の I、II、III の設問に答えよ。

I. A, B は論理変数を表し、論理変数 X に対し $\bar{X}$ はその否定を表す。また、 P, Q は集合 S を定義域とする述語論理を表すとする。次の論理式の否定をそれぞれ一つ示せ。

ただし、否定は単一の変数又は述語論理のみに使用した形で示すこと。

- (a) $(A \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge B)$
- (b) $A \rightarrow B$
- (c) $(\forall x \in S)(P(x) \wedge Q(x))$

II. 図のような非決定性有限オートマトンが認識する言語の補言語を認識する決定性有限オートマトンを図示せよ。



III. $\mathbb{Z}^+$ は正の整数全体の集合を、 $\mathbb{Z}_0^+$ は 0 以上の整数全体の集合を表すこととする。また、文字列 v, w に対し、 $|w|$ を w の長さ、 vw を v と w の接続、 w^i を w を i 個接続した文字列とし、集合 Σ に対し、 Σ^* を Σ が含む要素を 0 個以上並べてできる文字列全体の集合を表すこととする。以下の設問に答えよ。

正規言語に関して、次のポンピング補題が知られている。

言語 L が正規言語であるならば、次の論理式 X は真である。

$$X: (\exists p \in \mathbb{Z}^+) (\forall s \in L) (|s| \geq p \rightarrow (\exists xyz = s) (|y| > 0 \wedge |xy| \leq p \wedge (\forall i \in \mathbb{Z}_0^+) (xy^i z \in L)))$$

この補題を読みほぐくと、 L が正規言語であるならば、ポンピング長と呼ばれる定数 p の下で、 L に含まれる長さ p 以上の任意の文字列 s の三つの文字列 x, y, z への適切な分割によって、 y を任意の回数接続した文字列に置換しても必ずそれが L に含まれるようにすることができることを示している。

以下はポンピング補題の対偶を示している。これを用いて L が正規言語でないことを示すことができる場合がある。

次の論理式 Y が真であるならば、 L は正規言語でない。

$$Y: (\textcircled{A} \in \mathbb{Z}^+) (\textcircled{B} \in L) (\|s\| \geq p) \textcircled{C} (\textcircled{D} = s) (|y| = 0 \vee |xy| > p \vee (\textcircled{E} \in \mathbb{Z}_0^+) (\textcircled{F}))$$

- (1) Y 中の $\textcircled{A} \sim \textcircled{F}$ に当てはまる適切な記述を示せ。
- (2) 言語 L_1 を $L_1 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w = 0^i 1^i, i \in \mathbb{Z}_0^+\}$ 、言語 L_2 を $L_2 = \{w \in \{0, 1\}^* \mid w = 0^i 1^j, i, j \in \mathbb{Z}_0^+, i \geq j\}$ とする。ポンピング補題の対偶における Y が真であるための十分条件を考えると次の命題が得られる。なお、 $\textcircled{A} \sim \textcircled{F}$ には(1)と同じものが入る。

次の論理式 Z が真であるならば、 L は正規言語でない。

$$Z: (\textcircled{A} \in \mathbb{Z}^+) (\textcircled{B} \in L) (\|s\| \geq p) \textcircled{C} (\textcircled{D} = s) (|y| > 0 \wedge |xy| \leq p \wedge (\textcircled{E} \in \mathbb{Z}_0^+) (\textcircled{F}))$$

この命題を利用し、 L_1, L_2 が正規言語でないことを示す。 $\textcircled{A} \sim \textcircled{F}$ に当てはまる適切な記述を示せ。

- ・ L_1 が正規言語でないことを証明する。ポンピング長 p に依存する L_1 に含まれる文字列 s として $s = \textcircled{A}$ を考えると、 $s = xyz$ として考えられる $|y| > 0 \wedge |xy| \leq p$ を満たす任意の分割 xyz において $y = 0^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{Z}^+$) が言える。よって $\textcircled{C}$ 。以上より、 Z が真であるため、 L_1 は正規言語ではない。
 - ・ L_2 が正規言語でないことを証明する。ポンピング長 p に依存する L_2 に含まれる文字列 s として $s = \textcircled{B}$ を考えると、 $s = xyz$ として考えられる $|y| > 0 \wedge |xy| \leq p$ を満たす任意の分割 xyz において $y = 0^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{Z}^+$) が言える。よって $\textcircled{C}$ 。以上より、 Z が真であるため、 L_2 は正規言語ではない。
- (3) 言語 $L_3 = \{0^x \mid x \text{ は素数}\}$ が正規言語でないことを示せ。
- (4) 言語 $L_4 = \{0^x \mid x \text{ は合成数}\}$ が正規言語でないことを示せ。

【No. 8】 次の最適化問題(P)が最適解をもつとする。以下の I、II の設問に答えよ。

$$\text{Minimize } f(x) \quad \text{subject to } x \in S \quad \cdots (P)$$

ここで、 n は正の整数とし、 $S \subseteq \mathbb{R}^n$ は非空な集合、 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ は微分可能な関数とする。本問では、 $x \in \mathbb{R}^n$ に対して x^T は転置ベクトルを表す。また、 $\nabla f(x)$ は f の x における勾配ベクトルを表す。すなわち、 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ としたとき、 $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^T$ である。なお、必要ならば f が凸関数であるとき、 $f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T (y - x)$ が任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ について成り立つことを用いてもよい。また、各問を解くに当たり、それまでの問の結果を用いてもよい。

I. 問題(P)において $S = \mathbb{R}^n$ とする。また、 $x^* \in S$ に対し、関数 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$g(s) = f(x^* - s \nabla f(x^*))$$
と定義する。以下の問いに答えよ。

- (1) $\frac{dg(s)}{ds}$ を計算し、 $s = 0$ における値を求めよ。
- (2) $\nabla f(x^*) \neq 0$ ならば、ある $\bar{s} > 0$ が存在して $g(s) < g(0)$ が任意の $s \in (0, \bar{s}]$ について成り立つことを示せ。
- (3) x^* が最適解ならば $\nabla f(x^*) = 0$ であることを背理法で示せ。
- (4) 関数 f が凸関数のとき、 $\nabla f(x^*) = 0$ は x^* が問題(P)の最適解であるための十分条件でもあることを示せ。

II. 問題(P)において S を非空な閉凸集合とする。また、 $x \in S$ に対して集合 $N_S(x)$ を

$$N_S(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \text{任意の } a \in S \text{ について } y^T(a - x) \leq 0\}$$
と定義する。以下の問いに答えよ。

- (1) $n = 2$, $S = \mathbb{R}_+^2$ とする。 $N_{\mathbb{R}_+^2}((1, 1)^T)$, $N_{\mathbb{R}_+^2}((0, 0)^T)$, $N_{\mathbb{R}_+^2}((1, 0)^T)$ を求めよ。
ただし、 $\mathbb{R}_+^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ とする。
- (2) ある $x^* \in S$ について $-\nabla f(x^*) \notin N_S(x^*)$ であるならば、ある $\hat{a} \in S$ と $\bar{s} > 0$ が存在して、 $f(x^*) > f(x^* + s(\hat{a} - x^*))$ が任意の $s \in (0, \bar{s}]$ について成り立つことを示せ。
- (3) $x^* \in S$ が最適解ならば $-\nabla f(x^*) \in N_S(x^*)$ であることを背理法で示せ。
- (4) 関数 f が凸関数のとき、 $-\nabla f(x^*) \in N_S(x^*)$ は $x^* \in S$ が問題(P)の最適解であるための十分条件でもあることを示せ。

【No. 9】 力学及び電磁気学に関する以下のⅠ、Ⅱの設問に答えよ。

Ⅰ. 分子振動をモデル化した力学系に関する以下の問いに答えよ。

二酸化炭素分子 CO_2 のように、直線状に三つの原子がつながっている分子での分子振動を考えるために、図のような力学系を考える。つまり、中心に質量 m の質点 B、その両側に質量 M の質点 A と質点 C が、ばね定数 k のばねでつながっている系を考える。分子軸を x 軸として、分子軸に沿う方向の 1 次元の振動を考える。質点 A、B、C の平衡位置からの変位をそれぞれ x_1 、 x_2 、 x_3 とする。

(1) 三つの質点それぞれの運動方程式を書け。

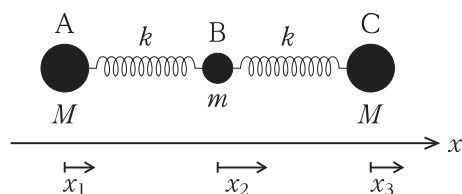
(2) 系の重心が原点にあり、動かないとする。この条件を表す式を書け。

(3) (2)の結果を用いて、(1)で求めた運動方程式から x_2 を消去して、 x_1 と x_3 に関する運動方程式に書き直せ。

(4) 基準振動においては、全ての質点は同じ振動数 ω で振動する。そこで、 a_1 、 a_3 をそれぞれ x_1 、 x_3 の振幅とし、 $x_1 = a_1 \exp(i\omega t)$ 、 $x_3 = a_3 \exp(i\omega t)$ とおいて、二つの基準振動数 ω_1 、 ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$) を求めよ。

(5) 二つの基準振動数 ω_1 、 ω_2 それぞれに対して、 a_1 と a_3 の関係を求め、それぞれどのような振動なのか、必要であれば図を用いて説明せよ。

(6) CO_2 の分子振動の周波数は、赤外領域にある。また、C 原子と O 原子の結合では分極が起こり、O 原子がわずかに負電荷を帯び、C 原子がわずかに正電荷を帯びる。赤外線電磁波が照射されたとき、(5)の二つの基準振動のうち、どちらかの基準振動が赤外線を吸収する。その理由を考察し、説明せよ。



II. 電磁気学に関する以下の問いに答えよ。

マクスウェル方程式及び電磁波の性質について考える。電場 $\mathbf{E}$ 、電荷密度 ρ_e 、磁束密度 $\mathbf{B}$ 、電流密度 $\mathbf{J}_e$ に対する真空中のマクスウェル方程式は

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J}_e + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$$

と表せる。ここで、 ϵ_0 、 μ_0 はそれぞれ真空の誘電率、真空の透磁率である。

まず、 z 座標及び時間 t を用いて、 $\alpha = z - ct$ 、 $\beta = z + ct$ とする。ただし、 c は座標と時間によらない正の定数である。真空中において、電場 $\mathbf{E}$ 、磁束密度 $\mathbf{B}$ がそれぞれ α のみに依存して $\mathbf{E} = (E(\alpha), 0, 0)$ 、 $\mathbf{B} = (0, B(\alpha), 0)$ なる形で存在しているものとする。

- (1) 電荷密度 ρ_e を求めよ。
- (2) $\frac{\partial}{\partial z}$ を $\frac{\partial}{\partial \alpha}$ 及び $\frac{\partial}{\partial \beta}$ を用いて表せ。
- (3) $\frac{\partial}{\partial t}$ を $\frac{\partial}{\partial \alpha}$ 、 $\frac{\partial}{\partial \beta}$ 及び c を用いて表せ。
- (4) 電流密度 $\mathbf{J}_e = 0$ のとき、 $E(\alpha) = E(z - ct)$ 及び $B(\alpha) = B(z - ct)$ が満たすべき変数 z と t に関する連立偏微分方程式を求めよ。
- (5) $\mathbf{J}_e = 0$ のとき、(4)の結果を用いて、 c を求めよ。ただし、 $\frac{dE(\alpha)}{d\alpha} \neq 0$ であるとしてよい。
- (6) $B(\alpha) = B(z - ct)$ 及び $E(\alpha) = E(z - ct)$ には、時間に依存しない項は存在しないとして、 $B(\alpha)$ を $E(\alpha)$ 及び c を用いて表せ。

次に、物質中における一般的な電場 $\mathbf{E}$ 及び磁束密度 $\mathbf{B}$ について考える。電束密度 $\mathbf{D}$ は分極(ベクトル) $\mathbf{P}$ を用いて、 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ と表され、磁場の強さ $\mathbf{H}$ は磁化(ベクトル) $\mathbf{M}$ を用いて、 $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}$ と表される。

- (7) $\mathbf{P}$ 、 $\mathbf{M}$ を用いずに物質中のマクスウェル方程式を表せ。また、各方程式について、その意味を説明せよ。

最後に、再び、真空中の場合を考える。通常のマクスウェル方程式では、電荷密度 ρ_e に対応する磁荷密度 ρ_m (磁気単極子)は考えない。しかし、仮に磁気単極子が自然界に有効量存在した場合、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ は $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mu_0 \rho_m$ と修正される。

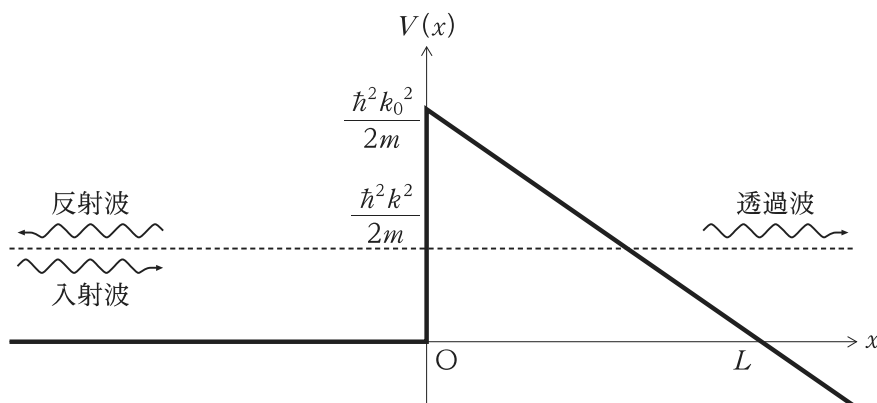
- (8) 新たに磁流密度 $\mathbf{J}_m$ を考え、磁荷密度 ρ_m との間に成り立つ磁荷保存則 $\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_m = 0$ を考えることで、 $\nabla \times \mathbf{E}$ を μ_0 、 $\mathbf{J}_m$ 、 $\mathbf{B}$ を用いて表せ。ただし、一般のベクトル場 $\mathbf{A}$ に対して、 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ が成り立つことを用いてよい。

【No. 10】 量子力学に関する以下の I、II の設問に答えよ。ただし、虚数単位を i とする。

I. 図のように、1 次元空間において、質量 m 、波数 k の粒子が、 x 軸負の方向から原点 O に向かってエネルギー $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ で定常的に入射されている。ポテンシャル $V(x)$ は

$$V(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ -\frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} \left(1 - \frac{x}{L}\right) & (0 \leq x) \end{cases}$$

であり、 k_0 及び L は正の実数とする。入射粒子の波数 k は k_0 より小さいとする。



定常状態の波動関数を $\phi(x)$ とすると、シュレーディンガー方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + V(x) \phi(x) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \phi(x)$$

と表される。 $x < 0$ の領域において、 $\phi(x)$ の一般解は $\phi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$ で与えられる。

ただし、 A 及び B はそれぞれ複素数である。 $0 \leq x$ の領域において、適切な実数 a , z_0 を選び、 $x = a(z_0 - z)$ と実変数 z に変数変換すると、シュレーディンガー方程式は

$$\frac{d^2 \phi(z)}{dz^2} = z \phi(z)$$

となる。この微分方程式の二つの独立な解は、エアリー関数と呼ばれる実関数 $\text{Ai}(z)$ 及び $\text{Bi}(z)$ で表され、 $\phi(x)$ の透過波を表す解は $\phi(x) = C \text{Ai}(z) - iC \text{Bi}(z)$ で与えられる。ただし、 C は複素数である。以下の問いに答えよ。

- (1) $x < 0$ の領域において、一般解は $\phi(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$ となることを示せ。
- (2) $x < 0$ の領域において、確率の流れの密度 $j(x)$ を求めよ。ただし、波動関数の複素共役を $\phi^*(x)$ として、 $j(x)$ は以下で与えられる。

$$j(x) = \frac{-i\hbar}{2m} \left(\phi^*(x) \frac{d\phi(x)}{dx} - \frac{d\phi^*(x)}{dx} \phi(x) \right)$$

- (3) a 及び z_0 をそれぞれ求めよ。
- (4) $0 \leq x$ の領域において、確率の流れの密度 $j(x)$ を、 m , a , C を用いて表せ。ただし、必要であれば $\text{Ai}(z) \frac{d\text{Bi}(z)}{dz} - \text{Bi}(z) \frac{d\text{Ai}(z)}{dz} = \frac{1}{\pi}$ を用いてよい。
- (5) $x = 0$ における波動関数の接続条件を示せ。

- (6) 透過率を、 a , k , $\text{Ai}(z_0)$, $\text{Bi}(z_0)$, $\frac{d\text{Ai}}{dz}(z_0)$ 及び $\frac{d\text{Bi}}{dz}(z_0)$ を用いて表せ。ただし、透過率とは、透過の確率の流れを入射の確率の流れで割ったものの絶対値である。

II. スピン $\frac{1}{2}$ 粒子のスピンの歳差運動について考える。時刻 t におけるスピンに関する規格化された波動関数を

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} \psi_+(t) \\ \psi_-(t) \end{pmatrix}$$

とすると、スピンに関するシュレーディンガー方程式は

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(t) = \hat{H} \psi(t)$$

で与えられる。ハミルトニアン演算子は、スピン演算子 $\hat{\mathbf{S}} = (\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z) = \frac{\hbar}{2}(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ を用いて

$$\begin{aligned} \hat{H} &= 2\omega_0 \hat{S}_z + 2\omega_1 (\hat{S}_x \cos 2\omega t + \hat{S}_y \sin 2\omega t) \\ &= \hbar\omega_0 \sigma_z + \hbar\omega_1 (\sigma_x \cos 2\omega t + \sigma_y \sin 2\omega t) \end{aligned}$$

で与えられるとする。ただし、 ω_0 , ω_1 及び ω は角振動数のパラメータであり、 σ_x , σ_y , σ_z は

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

のパウリ行列である。以下の問いに答えよ。

- (1) $\hat{S}_x$ と $\hat{S}_y$ の間の交換関係を求めよ。
- (2) $\omega_1 = 0$ のとき、 $\psi(t)$ を求めよ。ただし、 $\psi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とする。
- (3) $\omega_1 = 0$ のとき、 $\hat{\mathbf{S}}$ の期待値 $\mathbf{S}(t) = \langle \hat{\mathbf{S}} \rangle$ を求めよ。ただし、 $\mathbf{S}(0) = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$ とする。
- (4) $\hat{H} = e^{-i\omega t \sigma_z} (\hbar\omega_0 \sigma_z + \hbar\omega_1 \sigma_x) e^{i\omega t \sigma_z}$ が成り立つことを示せ。
- (5) $\psi(t) = e^{-i\omega t \sigma_z} \phi(t)$ と置いて、 $\phi(t)$ に関する微分方程式を求めよ。
- (6) $\phi(t) = \{A(t)\mathbf{I} + B(t)\sigma_x + C(t)\sigma_z\}\phi(0)$ と置いて(5)で求めた微分方程式を解き、 $\phi(t)$ を求めよ。ただし、 $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であり、 $\phi(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ とする。必要であれば、 $\Omega = \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2}$ を用いて表してよい。

【No. 11】 物性物理学に関する以下の I、II の設問に答えよ。

I. 1 次元固体結晶中の質量 m の電子について考える。 x 軸上に N 個の原子が等間隔 a で並んでいる。周期境界条件により、 N 番目の原子と 1 番目の原子は隣り合っていると考える。各格子点 na ($n = 1, 2, 3, \dots, N$) の原子 1 個によるポテンシャルエネルギーを $U(x - na)$ とし、原子の周りを運動する電子はエネルギー ε_0 の波動関数 $\psi(x - na)$ をもつとすると、シュレーディンガー方程式は

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x - na)$$

$$H_0 \psi(x - na) = \varepsilon_0 \psi(x - na)$$

で表される。ただし、 $l = 1, 2, 3, \dots, N$ として

$$\int \psi^*(x - na) \psi(x - la) dx = \delta_{n,l}$$

を満たす。ここで、 ψ^* は ψ の複素共役、 $\delta_{n,l}$ はクロネッカーのデルタである。

結晶ポテンシャル $V(x)$ は、各原子のポテンシャルエネルギーの和

$$V(x) = \sum_{n=1}^N U(x - na)$$

となるが、隣り合う原子間の波動関数の重なりが小さい場合には、 $x \approx na$ において、原子のポテンシャルエネルギーとそれ以外のポテンシャル $\Delta V(x - na)$ を用いて

$$V(x) = U(x - na) + \Delta V(x - na)$$

として、 ΔV を摂動的に取り扱うことができる。その結果、1 次元固体結晶中の電子の波動関数を $\Psi(x)$ とすると、シュレーディンガー方程式は

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

$$H\Psi(x) = E(k) \Psi(x)$$

で表され、 $\Psi(x)$ は周期ポテンシャル中の電子について成り立つブロッホの定理

$$\Psi(x + a) = e^{ika} \Psi(x)$$

を満たす、次の規格化された波動関数

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N e^{ikna} \psi(x - na)$$

で近似される。ただし、 k は波数である。以下の問いに答えよ。

- (1) 1 次元結晶中の電子の波動関数 $\Psi(x)$ について、自由電子の波動関数との比較から、周期的な結晶格子による散乱は電気抵抗にはならない理由を 2 ～ 5 行で説明せよ。
- (2) エネルギーの期待値は

$$E(k) = \int \Psi^*(x) H \Psi(x) dx = \varepsilon_0 - \alpha - 2\gamma \cos(ka)$$

であることを証明せよ。ただし、 α , γ を実数とし、原子中の電子の波動関数の局在性が強い
ため、同一位置原子及び最隣接原子との間の波動関数の重なり積分は

$$\int \psi^*(x - na) \Delta V(x - la) \psi(x - la) dx = -\alpha \delta_{n,l} - \gamma \delta_{n,l-1} - \gamma \delta_{n,l+1}$$

とし、それ以外はゼロとする。

(3) $-\frac{\pi}{a} < k < \frac{\pi}{a}$ (第一ブリルアン領域) の範囲で $E(k)$ の概形を図示し、 $k = 0$ の近傍と

$k = \pm \frac{\pi}{a}$ の近傍におけるエネルギー構造の特徴を、自由電子と比較しながら説明せよ。

(4) 空間的に局在した電子波束の群速度 $v(k)$ は

$$v(k) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E(k)}{\partial k}$$

で与えられる。1 次元固体結晶中の電子の群速度を波数 k の関数として求めよ。

(5) $-\frac{\pi}{a} < k < \frac{\pi}{a}$ の範囲で $v(k)$ の概形を図示し、 $k = 0$ の近傍と $k = \pm \frac{\pi}{a}$ の近傍での振る舞いを波動関数の特徴とともに説明せよ。

(6) 電子の有効質量 $m^*(k)$ は、

$$\frac{1}{m^*(k)} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 E(k)}{\partial k^2}$$

で与えられる。1 次元固体結晶中の電子の有効質量を求めよ。

(7) $-\frac{\pi}{a} < k < \frac{\pi}{a}$ の範囲で、 $m^*(k)$ の概形を図示し、 $k = 0$ の近傍と $k = \pm \frac{\pi}{a}$ の近傍での物理的な解釈を説明せよ。

(8) 1 次元固体結晶中の電荷 $-e$ の電子に一樣な静電場 F が加わった場合、波数 k の時間 t に関する方程式は

$$\hbar \frac{dk(t)}{dt} = -eF$$

で与えられる。電子の群速度を時間の関数として表せ。ただし、 $t = 0$ のとき、 $k(0) = k_0$ とする。また、時間とともに電子はどのように運動するかを説明せよ。

II. 温度 T の熱源と接する壁で周りを囲まれた、1 辺の長さが L 、体積 $V = L^3$ の立方体の空洞内に電磁波が閉じ込められていて、熱源と空洞内の電磁波は熱平衡状態にある。この空洞からの熱放射による電磁波のエネルギー密度分布を考える。

三次元直交座標系における位置を $\mathbf{r} = (x, y, z)$ とし、空洞は $0 \leq x \leq L$ 、 $0 \leq y \leq L$ 、 $0 \leq z \leq L$ の領域にあるとする。時間を t 、光速を c 、電磁波の角周波数を ω 、波長を $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ とする。壁で電磁波が完全に反射し振幅がゼロになる境界条件の下での電磁波の電場成分 $E(\mathbf{r}, t)$ は、

$$E(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{\pi}{L}\right)^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{n_x \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{L} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{L} z\right) \cos(\omega t)$$

で与えられる。ただし、 n_x, n_y, n_z を正の整数とする。波数ベクトルを $\mathbf{k} = \frac{\pi}{L}(n_x, n_y, n_z)$ とすると

$$\omega = c|\mathbf{k}| = ck$$

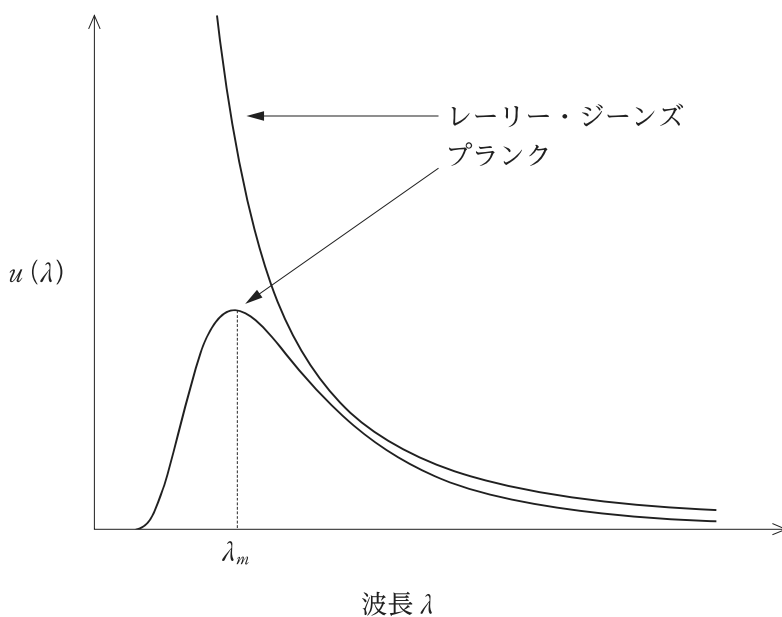
が成り立つ。 L が十分大きいものとして、以下の問いに答えよ。

(1) L が十分大きいとすると、 $\frac{\pi}{L}n_x, \frac{\pi}{L}n_y, \frac{\pi}{L}n_z$ は連続変数とみなすことができ、また、 $\mathbf{k}$ 空間において、体積 $\left(\frac{\pi}{L}\right)^3$ 当たり到一个の振動モードが含まれる。波長が λ と $\lambda + d\lambda$ の間にある電磁波の振動モードの数を $N(\lambda)d\lambda$ とするとき、 $N(\lambda)$ を求めよ。ただし、電磁波は横波なので、二つのモードがあることに注意せよ。

- (2) 電磁波を古典統計力学で取り扱うと、一つの振動モードは一つの 1 次元調和振動子で表される。また、1 次元調和振動子のハミルトニアンは、運動エネルギーと調和振動子ポテンシャルの和で表される。ただし、ボルツマン定数を k_B とする。
- (a) 温度 T のとき、一つの振動モードに分配されるエネルギーの平均値を求めよ。
- (b) 波長 λ と $\lambda + d\lambda$ の間にある空洞内の単位体積当たりの電磁波のエネルギーを $u(\lambda)d\lambda$ とする。 $u(\lambda)$ について、レーリー・ジーンズの熱放射式を導け。
- (3) 電磁波を光量子として取り扱うと、そのエネルギーは $\tilde{\varepsilon} = n\varepsilon = n\hbar\omega$ で表される。ただし、 n は 0 以上の整数である。
- (a) 温度 T で、一つの振動モードに分配されるエネルギーの平均値を求めよ。
- (b) $u(\lambda)$ について、プランクの熱放射式を導け。
- (4) (2)(b)、(3)(b)の結果の概形を図示すると、下図のようになる。図から分かるように、両者の振る舞いは、定性的には波長の長い領域で一致しているが、プランクの熱放射式の最大の強度となる波長を境に短波長側でずれが大きくなるとみなせる。この理由を(2)と(3)の結果を比較して説明せよ。また、熱放射が最大の強度となる波長 λ_m と温度 T との間にウィーンの法則

$$\lambda_m T = \text{一定}$$

が成り立つことを示せ。



【No. 12】 地球物理学に関する以下の I、II の設問に答えよ。

I. 大気における鉛直方向の安定性について考える。単位質量の気体についての熱力学第一法則より以下が成り立つ。

$$dQ = c_p dT - \frac{1}{\rho} dp \quad \dots\dots ①$$

ここで、 dQ は単位質量の気体に加えられた熱エネルギー、 c_p は単位質量当たりの定圧比熱、 T は温度、 ρ は密度、 p は気圧である。また、理想気体の状態方程式は

$$p = \rho RT \quad \dots\dots ②$$

である。ここで、 R は単位質量当たりの気体定数である。

乾燥大気における断熱変化の条件と式②を式①に用いて、整理すると、以下が得られる。

$$\frac{dT}{T} = \frac{R}{c_p} \frac{dp}{p} \quad \dots\dots ③$$

これを $p_0 = 1000 \text{ hPa}$ から任意の気圧 p まで積分することにより、以下の温位 θ の式が得られる。

$$\theta = T_0 = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{c_p}} \quad \dots\dots ④$$

ここで、 T_0 は p_0 での温度である。温位は断熱変化において保存量であり、気層の安定の判定に使われる。温位の鉛直勾配がない場合、大気の安定性は中立であり、 z を高度とし、以下の乾燥断熱減率 $\frac{dT}{dz}$ の式が導出できる。ただし、重力加速度の大きさを g とする。

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{g}{c_p} \quad \dots\dots ⑤$$

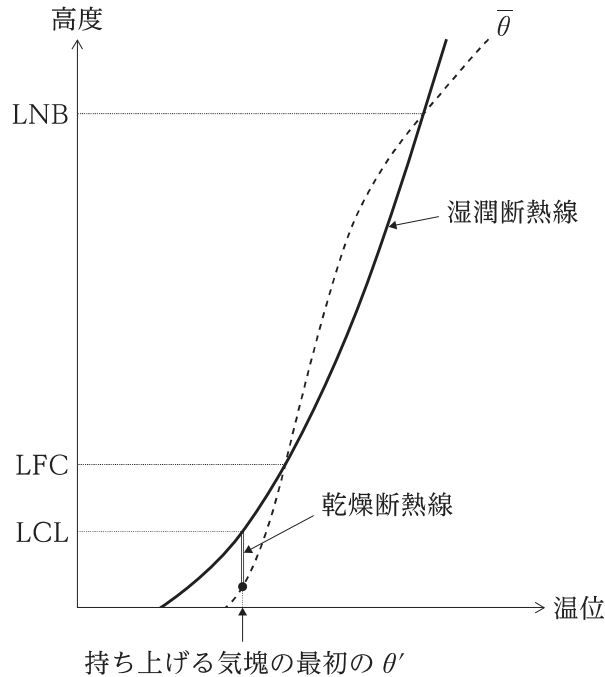
以下の(1)、(2)の問いに答えよ。

(1) 式③から温位の式④を導出せよ。

(2) 式②、④を用いて乾燥断熱減率の式⑤を導出せよ。ただし、以下の静水圧平衡の式を用いてよい。

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad \dots\dots ⑥$$

次に、気塊を持ち上げたときの安定度を考える。図は、横軸を温位、縦軸を高度としたもので、大気の鉛直構造を表す。この図中で、気塊の周辺にある大気の温位 $\bar{\theta}$ を破線、ある乾燥断熱線を二重線、ある湿潤断熱線を実線で示している。ここで、持ち上げる気塊の温位を θ' とする。 $\bar{\theta}$ と θ' は高度によって変化する変数である。いま、図中の●で示した地表付近にある不飽和な気塊が上昇流によって断熱的に持ち上げられることを考える。



持ち上げる気塊が飽和する高度を、持ち上げ凝結高度(LCL)という。この気塊が凝結熱を放出しながら、湿潤断熱線に沿って更に上昇すると、周囲の大気の温位と交差する場合がある。この高度を自由対流高度(LFC)という。LFC より上空に気塊が上昇すると、周囲の大気の温位と再度交差する。この高度を中立浮力高度(LNB)という。LFC と LNB の間で生じる浮力から得られる位置エネルギーとして計算した対流有効位置エネルギー $CAPE$ は、以下で定義される。

$$CAPE = g \int_{LFC}^{LNB} \frac{\theta' - \bar{\theta}}{\bar{\theta}} dz$$

ただし、厳密には温位ではなく、水蒸気の影響を考慮した仮温位を用いるが、ここでは簡便のため、温位を用いた。 $CAPE$ は対流発生の可能性を表す指標として使用される。ここで、LFC における気塊の上昇速度をゼロとすると、LNB での気塊の上昇速度 W_{LNB} は $CAPE$ から見積もることができる。例えば、 $CAPE$ が全て上昇運動のエネルギーに変わった場合、気塊の上昇速度が最大となる。現実で観測される上昇速度は、 $CAPE$ から見積もられた最大上昇速度より小さな値になる。これは、現実の大気で起こるさまざまな過程を考慮していないためである。以下の(3)、(4)、(5)の問いに答えよ。

- (3) LFC に達した気塊は、この後、この図中でどのように移動すると考えられるか、理由とともに 1 ～ 2 行で説明せよ。
- (4) W_{LNB} と $CAPE$ の関係を導出せよ。
- (5) 現実の大気では起こるはずだが、考慮されていないさまざまな過程の例を、三つ挙げよ。

II. 温帯低気圧や移動性高気圧に代表される、総観規模の大気の鉛直運動について考える。いま、東向きに x 軸、北向きに y 軸、鉛直座標に気圧 p をとり、風速の x 成分、 y 成分、 p 成分をそれぞれ u , v , ω とする。 t を時間、 $\frac{d}{dt}$ をラグランジュ微分として、 $\omega = \frac{dp}{dt}$ である。

中緯度の総観規模の流れにおいては、地衡風平衡が近似的に成り立つことが知られている(準地衡風近似)。このことを考慮して、水平風 (u, v) を地衡風 (u_g, v_g) と非地衡風 (u_a, v_a) の和として次のように表す。

$$u = u_g + u_a, \quad v = v_g + v_a$$

非地衡風は地衡風より 1 桁小さいことから、ここではラグランジュ微分は以下のように近似する。

$$\frac{d}{dt} \approx \frac{d_g}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}$$

温度風の関係は以下のように表される。

$$f_0 \frac{\partial u_g}{\partial p} = \frac{R}{p} \frac{\partial T}{\partial y} \quad \dots\dots ⑦$$

$$f_0 \frac{\partial v_g}{\partial p} = -\frac{R}{p} \frac{\partial T}{\partial x} \quad \dots\dots ⑧$$

f_0 はコリオリパラメータで定数とし、 R は単位質量当たりの気体定数、 T は温度である。断熱変化を仮定すると、熱力学の式は以下が成り立つ。

$$\frac{d_g T}{dt} - \frac{p}{R} S_0 \omega = 0 \quad \dots\dots ⑨$$

ここで、

$$S_0 = -\frac{1}{\rho_0 \theta_0} \frac{\partial \theta_0}{\partial p} \quad (> 0)$$

であり、 ρ_0 は密度、 θ_0 は温位で、それぞれ気圧のみの関数である。

準地衡風モデルによる前線まわりの循環を診断する関係式を求めるため、式⑦の両辺に $\frac{d_g}{dt}$ を作用させる。まず右辺は、式⑨を用いて、以下のように整理できる。

$$\frac{d_g}{dt} \left(\frac{R}{p} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = S_0 \frac{\partial \omega}{\partial y} + Q_y \quad \dots\dots ⑩$$

ここで、

$$Q_y = -\frac{R}{p} \left(\frac{\partial u_g}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

である。

同様に、式⑦の左辺に $\frac{d_g}{dt}$ を作用させると、

$$\frac{d_g}{dt} \left(f_0 \frac{\partial u_g}{\partial p} \right) = f_0^2 \frac{\partial v_a}{\partial p} - Q_y \quad \dots\dots ⑪$$

が得られる。式⑩と⑪の右辺はそれぞれ等しいので、

$$S_0 \frac{\partial \omega}{\partial y} - f_0^2 \frac{\partial v_a}{\partial p} = -2Q_y \quad \dots\dots ⑫$$

が成り立つ。また、鉛直断面内の流線関数 ψ を以下のように定義する。

$$v_a = -\frac{\partial \psi}{\partial p}, \quad \omega = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

これを式⑫に用いると、 ψ を決める式は

$$S_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + f_0^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} = -2Q_y \quad \dots\dots ⑬$$

となり、強制項である右辺に対する準地衡風による鉛直循環を診断する関係式となる。以下の(1)の問いに答えよ。

(1) 式⑬を導出せよ。

式⑬から診断される準地衡風鉛直循環を具体的な例で考える。等温線が東西に平行であり、温度は x に依存せず、北ほど低いとする。これに加えて、簡易な前線のモデルとして、 $u_g = ax$, $v_g = -ay$ (a は一定値で $a > 0$) という地衡風が吹いている場を考える。以下の(2)、(3)、(4)の問いに答えよ。

(2) Q_y の符号は正負どちらであるか、理由とともに示せ。

(3) (2)で考えた状況において、準地衡風鉛直循環である ψ の構造を、横軸を y 、縦軸を p として図示せよ。ただし、 y 軸は北向きを正、 p 軸は鉛直下向きを正とする。ここで、2次元 (x, y) 平面内での水平運動を表す渦度 $\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ とその渦度 ζ に対する流線関数 ϕ は以下の関係が成り立つことの類似から、鉛直循環の構造を考えてもよい。

$$\zeta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

(4) (3)で描いた循環を、東西に伸びる前線のまわりで生じる鉛直循環として考えたとき、前線の低緯度側と高緯度側それぞれにおける循環の特徴を1～2行で述べよ。

上記の議論をより一般化するため、もう一方の温度風の式⑧の両辺に $\frac{d_g}{dt}$ を作用させて、同様の計算をすると、

$$S_0 \frac{\partial \omega}{\partial x} - f_0^2 \frac{\partial u_a}{\partial p} = -2Q_x \quad \dots\dots ⑭$$

が得られる。ただし、

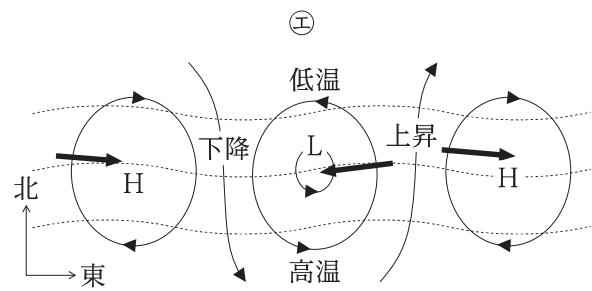
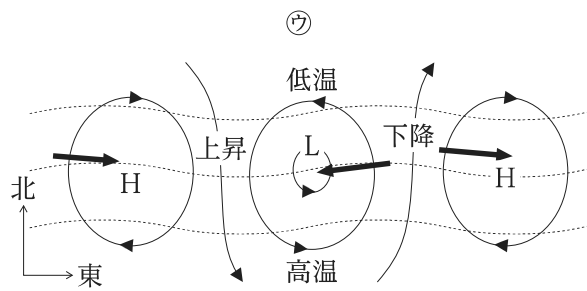
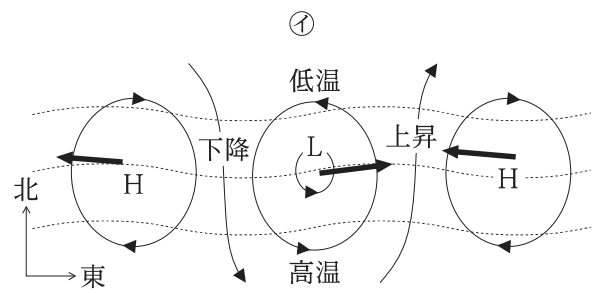
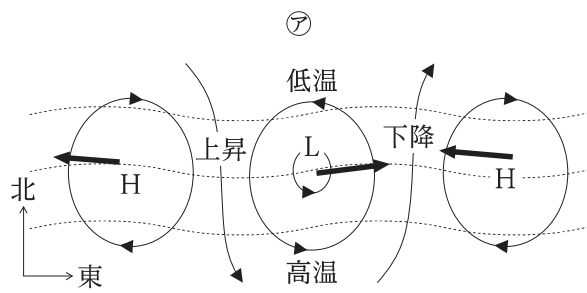
$$Q_x = -\frac{R}{p} \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \right)$$

である。ここで、式⑫を y で微分し、式⑭を x で微分して足し合わせ、連続の式を用いると、

$$S_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \omega + f_0^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} = -2 \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right) \quad \dots\dots ⑮$$

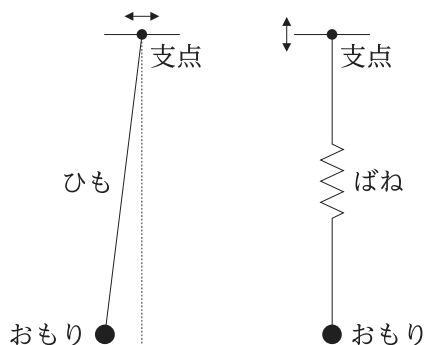
が得られ、 ω とベクトル $\mathbf{Q} = (Q_x, Q_y)$ の関係式が得られる。以下の(5)の問いに答えよ。

(5) 次の㉑～㉕は、中緯度対流圏下部の状況を模式的に示したものである。実線は等高線、破線は等温線、HとLはそれぞれ高気圧、低気圧を表す。これらに加えてベクトル $\mathbf{Q}$ を太い矢印として、式⑮から診断される上昇・下降域を図示したものとして最も妥当なのはどれか。理由とともに答えよ。



【No. 13】 地球物理学に関する以下のⅠ、Ⅱの設問に答えよ。

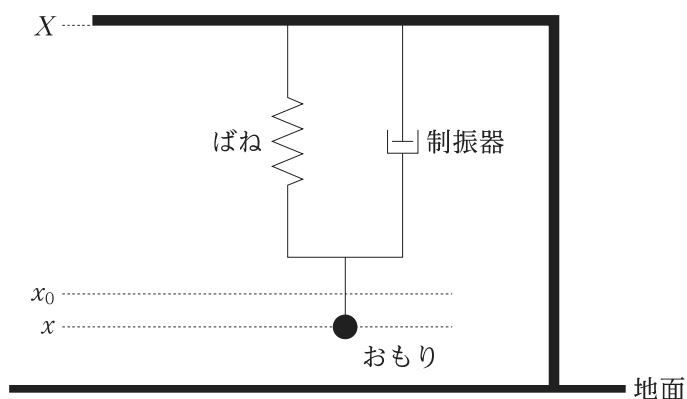
Ⅰ. 地面の揺れを正確に測るには、常に動かない点、つまり不動点をつくる必要がある。そのために振り子を利用する。図Ⅰのような振り子やばね振り子の振動を考える。これらの振り子の支点を瞬時に少し動かすと、振り子はある一定の周期で振動を始める。このときの周期(周波数)を固有周期(固有周波数)と呼ぶ。以下の(1)の問いに答えよ。



図Ⅰ

- (1) 長さ l のひもの先に質量 m のおもりをつけた振り子と、ばね定数 k のばねの先に質量 m のおもりをつけたばね振り子の固有周期をそれぞれ求めよ。ただし、重力加速度の大きさを g とする。

支点を固有周期よりも十分短い周期で振動させると、このおもりは不動点となる。(1)のばね振り子を例にして、おもりの振動について、運動方程式を使って考える。単純なばね振り子では、支点にステップ的な、あるいはパルス的な変位を与えても、振り子は固有周期で揺れてしまう。これでは、おもりの動きから支点の動きを再現することは難しいので、図Ⅱのような制振器をつけた振り子を利用する。ここで、地面の鉛直方向の揺れを考える。地面とこの振り子の支点は一体となって動くものとし、支点の位置を X で表す。重力とばねの力がつりあうおもりの位置 $x_0 = \frac{mg}{k}$ 、つりあいの位置 x_0 からのおもりの相対的な位置を x 、時間を t とする。向きは鉛直下向きを正とする。以下の(2)の問いに答えよ。



図Ⅱ

- (2) 制振器により、速度に比例した抵抗力 $2m\gamma\frac{dx}{dt}$ をおもりに与えるとするとき、運動方程式を m, k, γ, x, t, X を用いて示せ。さらに、(1)のばね振り子の固有角周波数を ω_0 として、 ω_0 を用いた形にこの式を整理せよ。ただし、 γ は抵抗力の大きさを表す定数である。また、 $\left|\frac{d^2x}{dt^2}\right| \ll g$ とする。

支点に与える振動と振り子の運動の関係を、上で求めた運動方程式の定常解から求め、地震計の特性をより定量的に考える。支点に定常的な振動 $X = \hat{X}(\omega)e^{-i\omega t}$ を与えたとき、振り子が $x = \hat{x}(\omega)e^{-i\omega t}$ で振動したとする。以下の(3)~(6)の問いに答えよ。

- (3) 応答関数 $V(\omega) = \frac{\hat{x}(\omega)}{\hat{X}(\omega)}$ の振幅と位相を求めよ。
- (4) 固有周期よりも短い周期で支点を揺らしたとき、振り子の変位はどのようなものになるか、1 ~ 2 行で述べよ。ただし、ダンピング定数 $h = \frac{\gamma}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ とする。
- (5) 固有周期よりも長い周期で支点を揺らしたとき、振り子の変位はどのようなものになるか、1 ~ 2 行で述べよ。ただし、ダンピング定数 $h = \frac{\gamma}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ とする。
- (6) 幅広い周波数帯で感度の高い地震計とするためには、ばねやおもりにどのような工夫をすればよいか、1 ~ 2 行で述べよ。

II. 短い時間スケールでは弾性的に振る舞い、長い時間スケールでは粘性的に振る舞う物質は、粘弾性体と呼ばれる。

以後の議論では、粘弾性体は次の条件を満たすものとする。一軸応力 σ を受ける場合、物質の弾性的なひずみ ε_e は、 E をヤング率とし、以下の式で与えられるものとする。

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E}$$

さらに、粘性のひずみ速度 $\frac{d\varepsilon_f}{dt}$ は、 μ を粘性率とし、ニュートン粘性流体のひずみ速度と応力の関係により、以下の式で与えられるものとする。

$$\frac{d\varepsilon_f}{dt} = \frac{\sigma}{2\mu}$$

まず、最初に粘弾性体のマクスウェルモデルについて考える。このモデルでは、全体のひずみ ε は、弾性と粘性によるひずみの合計 $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_f$ である。そのため、全体のひずみ速度 $\frac{d\varepsilon}{dt}$ は応力変化率 $\frac{d\sigma}{dt}$ による線形的な弾性のひずみ速度 $\frac{d\varepsilon_e}{dt}$ と、応力 σ による線形的な粘性のひずみ速度 $\frac{d\varepsilon_f}{dt}$ の重ね合わせであり、

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{\sigma}{2\mu}$$

となる。これが、マクスウェル粘弾性体において、外力と変形の間を関係を表すレオロジー則であり、ひずみ速度、応力、応力変化率に関係する。以下の(1)、(2)の問いに答えよ。

- (1) この粘弾性体に $t = 0$ でひずみ ε_0 が急に与えられ、 $t > 0$ でもそのひずみが維持される状況を考える。ひずみが急に与えられる際には、上のレオロジー則の式の時間微分項が卓越し、物質は弾性的に振る舞うことを用いて、応答が次のようになることを示せ。

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{Et}{2\mu}\right)$$

- (2) 応力が元の値の $\frac{1}{e}$ まで緩和されるのにかかる時間は(1)の $\frac{2\mu}{E}$ であり、粘弾性緩和時間 τ_{ve} と呼ぶ。 $\mu = 4.0 \times 10^{19} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ 、 $E = 70 \text{ GPa}$ とするとき、 τ_{ve} はおよそ何年になるか求めよ。

次に、粘弾性体の他のモデルとして、ケルビン・フォークトモデルについて考える。このモデルでは、あるひずみ ε とひずみ速度 $\frac{d\varepsilon}{dt}$ のもとで、応力 σ は、線形的な弾性応力 σ_e と線形的な粘性応力 σ_f の重ね合わせとして表される。以下の(3)、(4)の問いに答えよ。

- (3) ケルビン・フォークト粘弾性体において、一軸応力 σ を受ける場合のレオロジー則が次のようになることを示せ。

$$\sigma = \varepsilon E + 2\mu \frac{d\varepsilon}{dt}$$

- (4) ケルビン・フォークト粘弾性体に、 $t = 0$ で急激な応力 σ_0 が負荷された際の応答が次のようになることを示せ。なお、急激な応力の負荷に対しては、粘性が大きい場合、すぐにはほとんど変形しない ($\varepsilon = 0$) ことを用いてもよい。

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_{ve}}\right)\right)$$

最後に、再び、マクスウェルモデルについて考える。マクスウェル粘弾性体のレオロジー則を三次元の応力 $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ とひずみ $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ に一般化すると、 ν をポアソン比とし、次のような関係になる。

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon_1}{dt} &= \frac{1}{E} \frac{d\sigma_1}{dt} - \frac{\nu}{E} \left(\frac{d\sigma_2}{dt} + \frac{d\sigma_3}{dt} \right) + \frac{1}{2\mu} (\sigma_1 - p) \\ \frac{d\varepsilon_2}{dt} &= \frac{1}{E} \frac{d\sigma_2}{dt} - \frac{\nu}{E} \left(\frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{d\sigma_3}{dt} \right) + \frac{1}{2\mu} (\sigma_2 - p) \\ \frac{d\varepsilon_3}{dt} &= \frac{1}{E} \frac{d\sigma_3}{dt} - \frac{\nu}{E} \left(\frac{d\sigma_1}{dt} + \frac{d\sigma_2}{dt} \right) + \frac{1}{2\mu} (\sigma_3 - p)\end{aligned}$$

ここで

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

とする。 $\varepsilon_2 \neq 0$ ($t > 0$), $\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0$ の一軸ひずみ状態における、マクスウェル粘弾性体での応力とひずみを考える。 $t = 0$ で応力 $\sigma_2 = \sigma_0$ が急に負荷されたとし、 $t > 0$ で $\sigma_2 = \sigma_0$ であると仮定する。また、 $\sigma_1 = \sigma_3$ であるとする。以下の(5)、(6)の問いに答えよ。

- (5) 上の式から、このときの応力に関する微分方程式を導き、その一般解を示せ。
- (6) 初期条件及び境界条件を考え、このときの応力に関する解を求めよ。

【No. 14】 地質学に関する以下のⅠ、Ⅱの設問に答えよ。

Ⅰ. 海洋堆積物に関する以下の問いに答えよ。

- (1) 海水中を沈降する固体粒子はいずれ海底に到達する。固体粒子の由来は陸域から供給されたものや海洋表層で新たに生産されたものなどさまざまであるが、これらの固体粒子が海洋堆積物を構成する主要な成分になる。

海水中に存在する固体粒子は重力と浮力を受けているが、一般に、固体粒子は海水よりも密度が大きいため、鉛直下向きに沈降する。ここで、固体粒子の密度を ρ_s 、海水の密度を ρ_w 、重力加速度の大きさを g とし、固体粒子が直径 D の球であると仮定する。

- (a) 固体粒子にかかる下向きの力 F_g を求めよ。ただし、導出過程を含めて、2～5行で示すこと。

海水中を沈降する固体粒子が自ら受ける抵抗力 F_D は、粒子の投影面積に比例し、 $F_D = C_D P_D \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2$ と表される。ここで、 C_D は抗力係数と呼ばれる無次元量、 P_D は動圧である。動圧とは、移動する固体粒子が流体から受ける単位面積当たりの力であり、海水において、海水と固体粒子の相対速度を u とすると、 $P_D = \frac{1}{2} \rho_w u^2$ と表される。

- (b) F_g と F_D が釣り合っているときの終端沈降速度 w_s を求めよ。ただし、導出過程を含めて、2～5行で示すこと。また、解答には C_D を用いること。

しかし、実際には抗力係数の値は一定にはならず、粒子レイノルズ数 Re_p と呼ばれる無次元量の値によって変化することが知られている。 Re_p は、流れの代表長さとして粒子直径 D をとり、流れの代表速度として終端沈降速度 w_s をとった場合、流体の動粘性係数 ν を用いて $Re_p = \frac{w_s D}{\nu}$ と表せる。粒子レイノルズ数が小さいとき ($Re_p < 2$)、抗力係数の値は粒子レイノルズ数に依存し、 $C_D = \frac{24}{Re_p}$ と表されることが知られている。

- (c) 粒子レイノルズ数が小さいときの w_s を、 C_D 及び Re_p を含まない形で求めよ。ただし、導出過程を含めて、2～5行で示すこと。

上記(c)で得られた式は、ストークスの法則として知られている。海洋表層に生息する植物プランクトンの死骸の沈降速度もストークスの法則にしたがう。植物プランクトンは光合成によって有機物を生産するので、炭素循環の観点では、植物プランクトンの死骸は有機物粒子とみなすことができる。しかし、海水中を沈降する有機物粒子の沈降速度の実測値は、ストークスの法則による理論値よりも1桁大きいものも存在する。

- (d) このような理論値と観測値のずれの主な要因は何か、2～5行で説明せよ。

- (e) 海洋表層で生産された炭素を海洋深層に輸送する働きは生物ポンプと呼ばれる。地球の気候に対する生物ポンプの役割について2～5行で説明せよ。

- (2) 海洋堆積物に含まれる元素や微化石などのさまざまな物質の含有率又は複数の物質の含有率の比を測定することで、古海洋環境や物質循環を推定することが可能になる。

海洋堆積物に含まれる物質 X の含有率 C_X は、その物質自体の量の増減だけでなく、堆積物中のその他の固体粒子の量の増減によっても影響を受ける。そのため、より定量的に分析するためには、集積速度を用いることが望ましい。集積速度 AR とは、単位面積の海底に単位時間あたりに供給される固体粒子の質量である。物質 X の集積速度 AR_X は、 C_X と AR が分かれば、計算で求めることができる。

- (a) C_X が % で表され、 AR が既知であるとき、 AR_X を求めよ。
- (b) 集積速度は、堆積速度 SR と相互に変換可能である。 SR から AR に変換する式を、堆積物の間隙率 n ($0 < n < 1$) と、堆積物を構成する固体粒子の平均密度 $\bar{\rho}_s$ を用いて求めよ。ただし、導出過程を含めて、2 ～ 5 行で示すこと。また、簡単のため、続成作用に伴って生成する自生鉱物の寄与は考えないものとする。

海洋堆積物に含まれる有機分子のうち、生合成のみに由来する炭素骨格を持つものは、特にバイオマーカーと呼ばれ、古海洋の環境指標になるものも多い。代表的なバイオマーカーとして、 C_{37} 長鎖アルケノン(以下、アルケノンと呼称)が挙げられる。

- (c) アルケノンを生産する生物として妥当なものを図 I の A ～ D から一つ選び、その名前を答えよ。また、アルケノンの分析結果からどのような情報を推定できるか、2 ～ 5 行で答えよ。

著作権の関係のため、掲載できません。

Ⅱ．日本の地質に関する以下の問いに答えよ。

- (1) 図Ⅱは、日本の地表に分布する地質について、縦軸に形成年代、横軸に岩質や岩相をとり、形成年代を表す記号と岩石の種類と産状を表す記号をアンダーバー()で挟んだ凡例記号を示したものである。

著作権の関係のため、掲載できません。

- (a) 異なる凡例記号を二つ挙げ、それぞれに属する地層名又は岩体名とその地層や岩体の特徴(主な分布、主な岩石名、形成環境など)を 2 ～ 3 行で説明せよ。ただし、地層名又は岩体名は、地層命名の指針で層(Formation)相当のものとし、○○層、▲▲花こう岩体などの単位とする。また、二つ以上の地質凡例にまたがる地層や岩体は、いずれか一つの凡例記号に対応させるものとする。
- (b) 海洋プレート層序について、砂岩、泥岩、珪質泥岩、石灰岩、チャート、玄武岩を層序単元の下部から並べよ。また、その順番になる理由を 5 行程度で説明せよ。
- (c) 図Ⅱにおいて、第四紀に付加体がない理由を 2 ～ 5 行で説明せよ。
- (2) 図Ⅲは、最近 170 万年間の各地域における隆起・沈降量を示したものである。

著作権の関係のため、掲載できません。

- (a) 第四紀苦鉄質・珪長質深成岩類(図Ⅱの Q1-2_pbf)は、図Ⅲの①～⑦のどこで見られるかを答えよ。また、その理由を 3 行程度で説明せよ。ただし、この岩体の形成年代は 100 万年前とする。
- (b) 現在の日本列島で侵食速度の大きい地域は、隆起・沈降のいずれの地域か答えよ。また、隆起・沈降以外に侵食速度に影響する地形的特徴を 1 点挙げ、その地形が侵食されるメカニズムを 2 ～ 5 行で説明せよ。
- (c) 沖積層の地層を対比するために有用な試料分析方法を 2 点挙げ、その特徴について、それぞれ 2 ～ 5 行で説明せよ。

【No. 15】 地質学に関する以下のⅠ、Ⅱの設問に答えよ。

Ⅰ. プレートテクトニクスと地震に関する以下の問いに答えよ。

(1) プレートテクトニクスとは、地球が複数のプレートに分かれており、これらのプレートが相互作用しながら移動するという理論である。

(a) プレート拡大境界である中央海嶺に関する次の文章の㉖～㉙に適切な語句を入れよ。

「一般的に中央海嶺は、㉖ が連なる形態を示す。㉗ とは、分離された活断層の断片を表現し、その中心部で火山活動が活発であり、両端で地震活動が活発である傾向がある。㉘ の中心部では、㉙ が高いために、熱水噴出などが見られる。㉚ の境界には ㉛ 断層と呼ばれる構造が卓越する。

中央海嶺の軸部では ㉜ 質のマグマが固結して海洋地殻を形成する。海洋地殻が形成される際などに岩石に保持された地磁気を ㉝ という。」

(b) プレートテクトニクスが提唱される契機となった大陸移動説の根拠となる現象を2点挙げ、その概要について、それぞれ2行程度で説明せよ。

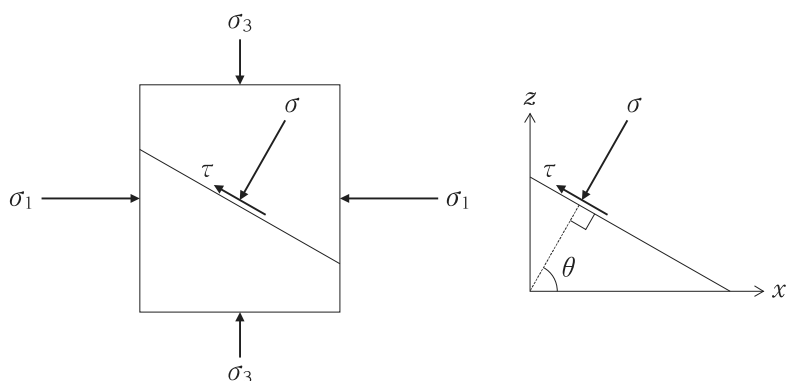
(2) 地震が起きるときの地下の応力について考える。

図Ⅰのように、地下のある地点での最大主応力 σ_1 が x 軸方向、最小主応力 σ_3 が z 軸方向に働いているとする。いま、その法線方向が x 軸、 z 軸のなす面内にあり、法線と x 軸のなす角が θ である任意の面を考える。その面に働く垂直応力 σ とせん断応力 τ を主応力で表すと、以下ようになる。

$$\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) + \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\cos 2\theta \quad \cdots\cdots\textcircled{1}$$

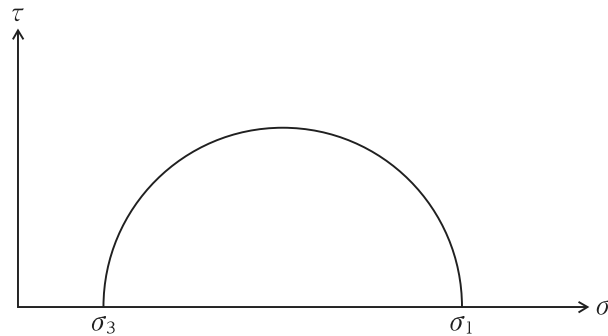
$$\tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\sin 2\theta \quad \cdots\cdots\textcircled{2}$$

なお、ここで、応力は圧縮方向を正とする。



図Ⅰ

- (a) 式①、式②となることを導出過程を含めて、示せ。
- (b) τ が最大になるときの θ の値と、そのときの τ を求めよ。ただし、導出過程を含めて、2～5行で示すこと。
- (c) 任意の面における、垂直応力とせん断応力の関係を直感的に示す方法として、モール円(図Ⅱ)がある。式①及び式②を満たす (σ, τ) はこの半円上の点として表すことができる。この円の方程式を導出せよ。



図Ⅱ

岩石破壊は、せん断応力がある破壊強度に達したときに起こる。地下では、破壊強度 τ_s は摩擦力に大きく依存し、次のクーロンの破壊条件の式で近似される。

$$\tau_s = \tau_0 + \mu\sigma \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

ここで、 μ は内部摩擦係数、 τ_0 はクーロンの破壊応力である。

- (d) σ を横軸に、 τ を縦軸にとり、岩石破壊が起きるときのモール円とクーロンの破壊条件の概形を図示し、その概形となる理由を2～5行で説明せよ。ただし、モール円の概形を実線、クーロンの破壊条件の概形を破線として、一つのグラフに描くこと。ここでは、各変数の具体的な値は問わないものとする。

II. 年代学に関する以下の問いに答えよ。

(1) ある地層や岩石の形成順序や形成年代を推定することは、地質学における重要な課題である。

(a) 相対年代と数値年代(絶対年代)の違いについて、3～5行で説明せよ。

(b) ある地層に対して相対年代を決定又は制約する具体的な方法を五つ挙げ、それぞれについて、どのような方法か2～3行で説明せよ。

(c) 数値年代の測定には、多くの場合、放射性核種の崩壊が用いられる。放射年代測定には、対象とする試料中の核種に関して閉鎖系が保たれていることが重要であるとともに、その試料内での元素や同位体の閉止温度(閉鎖温度)の概念も重要である。閉止温度とは何かについて、3～5行で説明せよ。

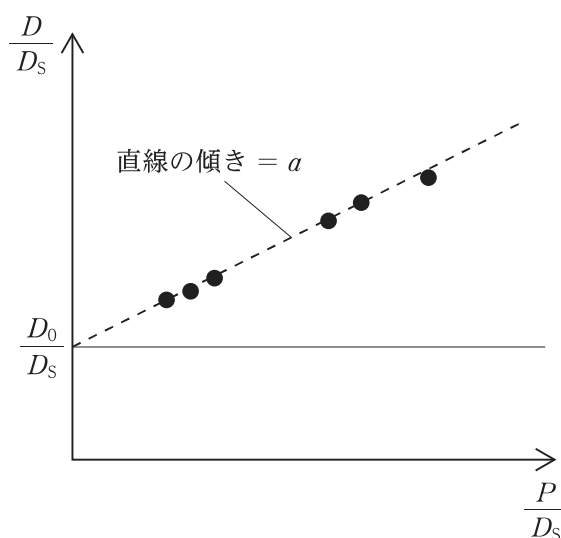
(d) 放射性炭素年代法の原理と留意点について、5～6行で述べよ。

(2) 放射性核種を用いて、ある岩石や鉱物の形成年代を求める場合を考える。形成から経過した時間を t 、そこに含まれる親核種の数 P 、壊変定数を λ [年⁻¹]とした場合、放射壊変と時間の関係は $\frac{dP}{dt} = -\lambda P$ と表すことができ、 $t = 0$ での親核種数を P_0 とすると、 $P = P_0 \exp(-\lambda t)$ と表せる。

(a) ある親核種の半減期を $T_{\frac{1}{2}}$ とした場合、 $T_{\frac{1}{2}}$ と λ の関係式を求めよ。ただし、導出過程を含めて、示すこと。

(b) 経過時間 t において、親核種から放射壊変によって生じた娘核種数を D 、 $t = 0$ での娘核種数を D_0 とした場合、 D を D_0 、 P 、 λ 、 t を用いて表せ。ただし、導出過程を含めて、示すこと。

(c) 娘核種の安定同位体の数を D_s とし、同位体比分析により図Ⅲのデータから直線(アイソクロン)の傾き a が求められた場合、そのアイソクロン年代 T を a と λ を用いて表せ。ただし、導出過程を含めて、示すこと。



図Ⅲ

科目別構成の詳細

科 目	出 題 数	問 題 番 号	ペ ー ジ
代数、幾何、解析、確率・統計	5 題	No. 1～5	1～8
情報科学	1 題	No. 6	9～10
数学モデル	1 題	No. 7	11～12
経営工学(経営数学・生産管理・品質管理)	1 題	No. 8	13
古典物理学、現代物理学(物性物理学を含む。)	3 題	No. 9～11	14～20
地球物理学	2 題	No. 12, 13	21～29
地質学	2 題	No. 14, 15	30～37

○ 15 題のうちから任意の 2 題を選んで解答してください。