

(C1) (C2) — 2023 — 数理学・物理・地球科学

専門(記述式)試験問題

注 意 事 項

1. 問題は **15 題**あります。このうち**任意の 2 題**を選んで解答してください。なお、この問題集の**裏表紙**に科目別構成の詳細が記載されていますので、解答開始前によく読んでおいてください。
2. 解答時間は **3 時間 30 分**です。
3. 答案用紙の記入について
 - (ア) **答案用紙は表面のみを使用してください**。裏面は採点されません。
 - (イ) 答案は濃くはっきり書き、書き損じた場合は、解答の内容がはっきり分かるように訂正してください。
 - (ウ) 答案用紙は **4 枚つづり 2 冊**です。問題 **1 題につき 1 冊**を使用してください。
 - (エ) 答案用紙の表紙の各欄にそれぞれ必要事項を記入してください。問題番号欄には、解答した問題の番号を記入してください。
 - (オ) 答案用紙各枚の右上にある [No.] の欄には問題番号を、(枚目) の欄には解答した問題ごとに何枚目の答案かを記入してください。
 - (カ) 試験の公正を害するおそれがありますので、答案用紙の氏名欄以外に氏名その他解答と関係のない事項を記載しないでください。
4. 下書き用紙はこの問題集の**中央部**にとじ込んであります。**試験官の指示に従って、試験開始後に問題集から下書き用紙だけを慎重に引きはがして**使用してください。なお、誤って問題集を破損しても、問題集の交換はできませんので注意してください。
5. この問題集で単位の明示されていない量については、全て国際単位系 (SI) を用いることとします。
6. この問題集は、本試験種目終了後に持ち帰りができます。
7. 本試験種目の途中で退室する場合は、退室時の問題集及び下書き用紙の持ち帰りはできませんが、希望する方には後ほど渡します。別途試験官の指示に従ってください。なお、試験時間中に、この問題集から**下書き用紙以外**を切り取ったり、問題を転記したりしないでください。
8. 下欄に受験番号等を記入してください。

第 1 次試験地	試験の区分 数理学・物理・ 地球科学	受験番号	氏 名
----------	--------------------------	------	-----

指示があるまで中を開いてはいけません。

【No. 1】 以下の I、II の設問に答えよ。

I. n を正の整数とし、複素数を成分とする n 次の正方行列全体の集合を $M_n(\mathbf{C})$ で表す。

$A \in M_n(\mathbf{C})$ とする。

x を変数とする複素数係数多項式全体の集合を $\mathbf{C}[x]$ で表す。 $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k \in \mathbf{C}[x]$ に対して、 $f(A) = a_0E + a_1A + \cdots + a_kA^k \in M_n(\mathbf{C})$ と定め、

$$N_A = \{f(x) \in \mathbf{C}[x] \mid f(A) = O\}$$

とする。ただし、 $E \in M_n(\mathbf{C})$ は単位行列であり、 $O \in M_n(\mathbf{C})$ は零行列である。また、 A の固有多項式(特性多項式)が N_A の元であること(ハミルトン・ケーリーの定理)は証明なしに用いてよい。

$m_A(x)$ を、 N_A の定数でない元のうち、次数が最低であり、最高次の係数が 1 であるものとする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) N_A の全ての元は $m_A(x)$ で割り切れることを示せ。
- (2) 複素数 λ が A の固有値ならば、 $m_A(\lambda) = 0$ であることを示せ。
- (3) $A^k = O$ を満たす正の整数 k が存在するならば、 $A^n = O$ が成り立つことを示せ。

(4) $n = 4$ で $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ のとき、 $m_A(x)$ を求めよ。

- (5) $n = 7$ のとき、 $m_A(x) = (x - 1)^3(x - 2)^2$ を満たす $A \in M_7(\mathbf{C})$ の例を挙げ、その A が確かに例になっていることを示せ。

II. 等式

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n} \quad (*)$$

の証明について、以下の問いに答えよ。

- (1) 極限 $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$ を求めよ。以下では、 0^0 はこの値を意味するものとする。
- (2) 0 以上の整数 n に対して関数 $f_n: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$f_n(y) = \sum_{k=0}^n \frac{y^k}{k!}$$

で定義し、関数 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ を $f(y) = e^y$ で定義する。このとき、関数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ は関数 f に広義一様収束すること、すなわち、任意の正の実数 R に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{-R \leq y \leq R} |f_n(y) - f(y)| = 0$$

が成り立つことを示せ。ただし、関数列 $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ が関数 f に各点収束すること、すなわち、任意の実数 y に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) = f(y)$$

が成り立つことは証明なしに用いてよい。

- (3) $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ を連続関数とすると、(2)の関数 f_n と f に対し、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(\varphi(x)) dx = \int_0^1 f(\varphi(x)) dx$$

が成り立つことを示せ。

- (4) 0 以上の整数 n に対して

$$\int_0^1 (x \log_e x)^n dx$$

を求めよ。

- (5) 等式 (*) が成り立つことを示せ。

【No. 2】 R を積に関する単位元 1 をもつ可換環とする。ただし、 R は零環ではないとする。また、 $R[X]$ を、 R を係数にもつ 1 変数多項式環とする。以下の設問に答えよ。

- (1) I を R のイデアルとする。 $r \in R$ で、正の整数 n を適当にとると $r^n \in I$ となるようなもの全体の集合を \sqrt{I} とする。このとき、 \sqrt{I} は R のイデアルであることを示せ。
- (2) I が R の素イデアルであるとき、 $\sqrt{I} = I$ であることを示せ。
- (3) 和に関する単位元 $0 \in R$ が生成するイデアルを (0) と記し、 $\sqrt{(0)}$ を R のべき零根基という。 R のべき零根基は、 R の全ての素イデアルの共通部分に等しいことを示せ。ただし、Zorn の補題は証明なしに用いてよい。
- (4) $I \neq R$ を R のイデアルとする。 \sqrt{I} は I を含むような R の全ての素イデアルの共通部分に等しいことを示せ。
- (5) 有理整数環 \mathbf{Z} を考え、 $m \in \mathbf{Z}$ が生成するイデアルを (m) と記す。このとき、 $\sqrt{(12)} = (m)$ を満たすような $m \in \mathbf{Z}$ を一つ求めよ。
- (6) 実数係数 1 変数多項式環 $\mathbf{R}[X]$ を考え、 $f(X) \in \mathbf{R}[X]$ が生成するイデアルを $(f(X))$ と記す。このとき、 $\sqrt{(X^3 - 7X^2 + 16X - 12)} = (f(X))$ を満たすような $f(X) \in \mathbf{R}[X]$ を一つ求めよ。
- (7) u を R の単元とする。 a が R のべき零根基に含まれる元であるとき、 $u + a$ も R の単元であることを示せ。
- (8) 「 $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ が $R[X]$ の単元である」ことの必要十分条件は、「 a_0 が R の単元であり、かつ、任意の $i = 1, \dots, n$ に対して a_i が R のべき零根基に含まれる」であることを示せ。
- (9) 「 $f = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ が $R[X]$ のべき零根基に含まれる」ことの必要十分条件は、「任意の $i = 0, 1, \dots, n$ に対して a_i が R のべき零根基に含まれる」であることを示せ。
- (10) 「 x が R の全ての極大イデアルの共通部分の元である」ことの必要十分条件は、「任意の $y \in R$ に対し $1 + xy$ が R の単元である」であることを示せ。
- (11) $R[X]$ のべき零根基は、 $R[X]$ の全ての極大イデアルの共通部分に等しいことを示せ。

【No. 3】 以下の I、II の設問に答えよ。

I. 3次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^3 内の部分集合 $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ について考える。 S^2 には \mathbf{R}^3 のユークリッド位相から誘導される相対位相を入れる。2次元ユークリッド空間の点 $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ と $(x, y, 0) \in \mathbf{R}^3$ を同一視することによって $\mathbf{R}^2 \subset \mathbf{R}^3$ とみなす。

S^2 から 1 点 $(0, 0, 1)$ を除いた S^2 の開集合を $U = S^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ とおく。写像 $\varphi: U \rightarrow \mathbf{R}^2$ を、点 $(x, y, z) \in U$ に対し、この点と点 $(0, 0, 1)$ を通る直線と \mathbf{R}^2 との交点 $\varphi(x, y, z)$ を対応させる写像と定める。また、 S^2 から 1 点 $(0, 0, -1)$ を除いた S^2 の開集合を $V = S^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$ とおく。写像 $\psi: V \rightarrow \mathbf{R}^2$ を、点 $(x, y, z) \in V$ に対し、この点と点 $(0, 0, -1)$ を通る直線と \mathbf{R}^2 との交点 $\psi(x, y, z)$ を対応させる写像と定める。

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) S^2 がコンパクトなハウスドルフ空間である理由を説明せよ。
- (2) φ 及び ψ が同相写像であることを示せ。
- (3) $\{(U, \varphi), (V, \psi)\}$ は S^2 の C^∞ 級座標近傍系であることを示せ。

座標近傍 (U, φ) に関する局所座標を (u, v) ($= \varphi(x, y, z)$) とする。 (U, φ) における局所表示が $\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}$ となる U 上のベクトル場をそれぞれ $\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v$ と表す。

- (4) \mathbf{X}_u は S^2 上の C^∞ 級ベクトル場に拡張できることを示せ。
- (5) 自然な埋め込み $\iota: S^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ による \mathbf{R}^3 のユークリッド計量 $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ の引き戻しを g とするとき、 $g(\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v)$ を求めよ。

II. X, Y を位相空間とする。以下の問いに答えよ。

- (1) X から Y への連続写像 $f_0: X \rightarrow Y$ と $f_1: X \rightarrow Y$ がホモトピックであることの定義を述べよ。
また、 X と Y がホモトピー同値であることの定義を述べよ。
- (2) Y が X の部分空間であるとき、次の条件(i), (ii), (iii)を満たす連続写像 $f: X \rightarrow X$ が存在するならば、 X と Y がホモトピー同値であることを示せ。
 - (i) 任意の $x \in X$ に対し、 $f(x) \in Y$
 - (ii) 任意の $y \in Y$ に対し、 $f(y) = y$
 - (iii) f は恒等写像 $\text{id}_X: X \rightarrow X$ とホモトピック

以下では、 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ とし、 $x_0 \in S^1$ とする。位相空間 X を $X = S^1 \times S^1$ とし、その部分空間 Y を $Y = (S^1 \times \{x_0\}) \cup (\{x_0\} \times S^1)$ と定める。また、 $a \in X \setminus Y$, $b \in Y$ とする。

- (3) $X \setminus \{a\}$ と Y がホモトピー同値であることを示せ。
- (4) $X \setminus \{a, b\}$ の 1 次整係数ホモロジー群の階数を求めよ。
- (5) $X \setminus \{a, b\}$ と $Y \setminus \{b\}$ (ただし、 $b \neq (x_0, x_0) \in Y$) がホモトピー同値ではないことを示せ。
- (6) $X \setminus \{a, (x_0, x_0)\}$ と $Y \setminus \{(x_0, x_0)\}$ がホモトピー同値ではないことを示せ。

【No. 4】 以下の I、II の設問に答えよ。

I. 空間 1 次元の熱方程式

$$(HE) : \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (t > 0, x \in \mathbf{R})$$

について、以下の問いに答えよ。

(1) $K(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$ とするとき、 $u(t, x) = K(t, x)$ は (HE) の解であることを示せ。

(2) $t > 0$ に対し、積分 $\int_{\mathbf{R}} K(t, x) dx$ の値を求めよ。ただし、次の Gauss 積分に関する公式は証明なしに用いてよい。

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

(3) $\varphi(x)$ を \mathbf{R} 上の有界な連続関数とするととき、任意の $\delta > 0$ に対して次が成り立つことを示せ。

$$\lim_{t \rightarrow +0} \int_{|x| \geq \delta} K(t, x) \varphi(x) dx = 0$$

(4) $\varphi(x)$ を \mathbf{R} 上の連続関数とし、さらに $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$ であるとする。このとき、 $\varphi(x)$ は \mathbf{R} 上で一様連続であることを示せ。ただし、 $I \subset \mathbf{R}$ 上の関数 $f(x)$ が I 上で一様連続であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta > 0$ が存在し、 $|x - y| < \delta$ なる任意の $x, y \in I$ に対して $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ となることである。また、有界閉区間上の任意の連続関数とその有界閉区間上で一様連続であることは、証明なしに用いてよい。

(5) $\varphi(x)$ を \mathbf{R} 上の連続関数とし、さらに $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$ であるとする。このとき、

$$u(t, x) = \int_{\mathbf{R}} K(t, x - y) \varphi(y) dy$$

は (HE) の解であり、さらに任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して $\lim_{t \rightarrow 10} u(t, x) = \varphi(x)$ を満たすことを示せ。

II. 定数 $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$ を含む次の 2 階線形常微分方程式

$$(E) : x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x(x + \alpha) \frac{dy}{dx} + \alpha y = 0 \quad (x > 0)$$

について、以下の問いに答えよ。

(1) (E) は

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{-n} \quad c_0 = 1$$

なる形の x^{-1} に関する形式的べき級数解をただ一つもつことを示し、 c_n を n と α を用いて表せ。ただし、(E) の形式的べき級数解とは、収束するとは限らないべき級数であって、その微分を項別微分により定義した際に、形式的べき級数として (E) を満たす(すなわち、(E) の左辺が、係数が全て 0 のべき級数となる)ものである。

(2) (1) で得られた形式的べき級数解の収束半径は 0 であること、すなわち、どのような $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ に対しても(1)で得られた形式的べき級数解は収束しないことを示せ。

(3) $\alpha \in \mathbf{R}$ 及び $x > 0$ に対し、 $I_\alpha(x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{-\alpha} dt$ とおく。このとき、次が成り立つことを示せ。

$$I_\alpha(x) = e^{-x} x^{-\alpha} - \alpha I_{\alpha+1}(x)$$

(4) $e^x x^\alpha$ が (E) の解であることを示し、定数変化法を用いて $e^x x^\alpha$ と線形独立な (E) の解を一つ求めよ。ただし、解の表示に(3)で定義した $I_\alpha(x)$ を用いてよい。

(5) (E) の解 $y(x)$ であって、(1)で求めた形式的べき級数解に $x \rightarrow +\infty$ において漸近展開されるもの、すなわち、0 以上の任意の整数 N に対して

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^N \left(y(x) - \sum_{n=0}^N c_n x^{-n} \right) = 0$$

を満たすものを一つ求めよ。さらに、その解が実際に(1)で求めた形式的べき級数解に漸近展開されることを示せ。

【No. 5】 本問では、基礎となる確率空間を (Ω, \mathcal{F}, P) とし、確率変数は実数値であるとする。確率変数 W の期待値を $E[W]$ 、分散を $V[W]$ で表す。また、確率変数 W, Z の共分散を $\text{Cov}[W, Z]$ で表す。確率変数 W と $t \in \mathbf{R}$ に対して、 $E[\cos(tW)] + iE[\sin(tW)]$ を $E[e^{itW}]$ という記号で表す。ここで、 i は虚数単位である。実数 t を変数とする複素数値関数 $E[e^{itW}]$ を、 W の特性関数という。

以下の I ~ IV の設問に答えよ。なお、次の事実は証明なしに用いてよい。

- ・ 確率変数 W, Z が独立であるとき、 $W + Z$ の特性関数は、 W の特性関数と Z の特性関数の積と一致する。
- ・ 確率変数 W が $E[W^2] < \infty$ を満たすとき、 W の特性関数について

$$E[e^{itW}] = 1 + iE[W]t - \frac{E[W^2]}{2}t^2 + o(t^2) \quad (t \rightarrow 0)$$

が成り立つ。

I. 以下の問いに答えよ。

- (1) 確率変数 X, Y は $V[X] = V[Y] < \infty$ を満たすとする。 $S = X + Y, T = X - Y$ とするとき、 $\text{Cov}[S, T] = 0$ となることを示せ。
- (2) 確率変数 X, Y は独立同分布で、

$$P(X = 1) = P(Y = 1) = P(X = -1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}$$

を満たすとする。 $S = X + Y, T = X - Y$ とするとき、 S と T は独立ではないことを示せ。

II. 複素数 z, w が $|z| \leq 1, |w| \leq 1$ を満たすとき、任意の正の整数 n に対して

$$|z^n - w^n| \leq n|z - w|$$

が成り立つことを示せ。

III. 確率変数 X は $E[X] = 0, V[X] = 1$ を満たすとする。 X の特性関数を $f(t)$ とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $s \in \mathbf{R}$ とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f\left(\frac{s}{n}\right) \right)^n = 1$ を示せ。
- (2) $s \in \mathbf{R}$ とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(f\left(\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \right)^n = e^{-\frac{s^2}{2}}$ を示せ。

IV. 確率変数 X, Y は独立同分布で、

$$E[X] = E[Y] = 0, \quad V[X] = V[Y] = 1, \quad E[e^{itX}] = E[e^{itY}] = f(t) \quad (t \in \mathbf{R})$$

を満たすとする。さらに、 $S = X + Y, T = X - Y$ とし、 S と T は独立であると仮定する。以下の問いに答えよ。

- (1) 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して、 $f(2t) = f(t)^3 f(-t)$ が成り立つことを示せ。
- (2) 任意の $s \in \mathbf{R}$ に対して、 $f(s) = \left(f\left(\frac{s}{2}\right) \right)^2 \left| f\left(\frac{s}{2}\right) \right|^2$ が成り立つことを示せ。

- (3) $f(s) = 0$ となる $s \in \mathbf{R}$ は存在しないことを示せ。
- (4) $s \in \mathbf{R}$ に対して、 $g(s) = \frac{f(s)}{f(-s)}$ と定める。任意の $s \in \mathbf{R}$ に対して $g(s) = \left(g\left(\frac{s}{2}\right)\right)^2$ が成り立つことを示せ。
- (5) $s \in \mathbf{R}$ とする。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(g\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n$ を求めよ。
- (6) 任意の $s \in \mathbf{R}$ に対して、 $g(s) = 1$ であることを示せ。
- (7) $f(s)$ を求めよ。

【No. 6】 以下の I、II の設問に答えよ。

I. 決定性有限オートマトン G は

- ・ Q は状態の有限集合
- ・ Σ は入力記号の有限集合
- ・ $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow Q$ は遷移関数
- ・ $q \in Q$ は開始状態
- ・ $F \subseteq Q$ は受理状態の状態集合

として、五つ組 $G = (Q, \Sigma, \delta, q, F)$ で定義される。決定性有限オートマトン G によって受理され得る系列を網羅した集合を正規言語 $L(G)$ とすると、任意の正規言語 $L(G)$ に対して反復補題が成立する。すなわち、ある正の整数 m が存在し、 $L(G)$ に属する長さが m 以上の任意の系列 w に対して、 Σ の要素からなる適当な系列 x, y, z が存在して $w = xyz$ と表され、次の三つの条件が満たされる。

- ・ 0 以上の任意の整数 i に対し、 $xy^iz \in L(G)$
- ・ $|y| \geq 1$
- ・ $|xy| \leq m$

ただし、 $|w|$ は系列 w の長さである。以下の問いに答えよ。

- (1) 言語 $L_1 = \{a^n b^n \mid n = 1, 2\}$ を考える。 L_1 が正規言語である場合は対応する決定性有限オートマトンの状態遷移図を描け。 L_1 が正規言語でない場合は反復補題を用いて正規言語でないことを示せ。
- (2) 言語 $L_2 = \{a^p \mid p \text{ は素数}\}$ を考える。 L_2 が正規言語である場合は対応する決定性有限オートマトンの状態遷移図を描け。 L_2 が正規言語でない場合は反復補題を用いて正規言語でないことを示せ。
- (3) 正規言語が補集合を取る操作に関して、閉じていることを示せ。
- (4) 正規言語 L_3, L_4 に対し、 $L_3 - L_4$ (L_3 に含まれるが L_4 には含まれない系列の集合) が正規言語であることを示せ。ただし、正規言語が和集合、積集合(共通集合)を取る操作に関して、閉じていることを用いてよい。

II. データ x_1, x_2, \dots, x_n が得られたとする。このデータに対して確率密度関数

$p_{x, \theta}(x) = \sum_{y=1}^G p_{x, y, \theta}(x, y) = \sum_{y=1}^G p_{x|y, \theta}(x|y) p_{y, \theta}(y)$ を考える。ただし、 $\theta \in \mathbb{R}^d$ は d 次元のパラメータベクトル、 $x \in \mathbb{R}$ 、 $y \in \{1, 2, \dots, G\} = \mathcal{Y}$ 、 $p_{x, y, \theta}(x, y)$ は x, y の同時確率密度関数、 $p_{x|y, \theta}(x|y)$ は y を与えたときの x の条件付き確率密度関数、 $p_{y, \theta}(y)$ は \mathcal{Y} 上の確率関数とする。平均対数尤度 $L(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log_e p_{x, \theta}(x_i)$ をなるべく大きくするようなパラメータベクトル θ を求めるために、

以下のアルゴリズムを考える。ただし、 $p_{y|x, \theta}(y|x)$ を x を与えたときの y の条件付き確率関数とする。また、確率密度関数及び確率関数は常に正の実数をとるものとする。

(手順 1) $t = 0$ とし、初期値 θ_0 をランダムに決定する。またアルゴリズムの繰返し回数 T を決定する。

(手順 2) for $t = 0, 1, \dots, T$

(E-step) $Q(\theta, \theta_t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{y=1}^G p_{y|x, \theta_t}(y|x_i) \log_e p_{x|y, \theta}(x_i|y) p_{y, \theta}(y)$ を計算する。

(M-step) $Q(\theta, \theta_t)$ が最大となる θ を求め、 θ_{t+1} とする。ただし、 θ_{t+1} は常に存在し、容易に求まるものとする。

- (1) $G = 2$, $p_{x|y, \theta}(x|1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, $p_{x|y, \theta}(x|2) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp(-2(x-5)^2)$,
 $p_{y, \theta}(1) = \frac{3}{4}$, $p_{y, \theta}(2) = \frac{1}{4}$ とする。 $p_{x, \theta}(x)$ のグラフの概形を描け。また、 $p_{y|x, \theta}(1|x)$ のグラフの概形を描け。
- (2) $f(s)$ を正の実数 \mathbb{R}^+ 上の 2 階微分可能な関数とし、曲線 $t = f(s)$ の $s = s_0$ における接線を $t = as + b$ とする。 $f(s)$ の 2 階微分 $f^{(2)}(s)$ が任意の $s \in \mathbb{R}^+$ に対し $f^{(2)}(s) \leq 0$ を満たすとき、 $f(s) \leq as + b$ であることを示せ。
- (3) 正の実数 \mathbb{R}^+ 上の 2 階微分可能な関数 $f(s)$ が $f^{(2)}(s) \leq 0$ を満たすとき、 $\sum_{y=1}^G w_y = 1$,
 $0 \leq w_y \leq 1$ として任意の s_1, \dots, s_G に対し、 $\sum_{y=1}^G w_y f(s_y) \leq f\left(\sum_{y=1}^G w_y s_y\right)$ が成り立つことを示せ。
- (4) $\log_e \sum_{y=1}^G p_{x, y, \theta_{t+1}}(x, y) \geq \sum_{y=1}^G p_{y|x, \theta_t}(y|x) \log_e \frac{p_{x, y, \theta_{t+1}}(x, y)}{p_{y|x, \theta_t}(y|x)}$ を示せ。
- (5) $L(\theta_{t+1}) - Q(\theta_{t+1}, \theta_t) \geq -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{y=1}^G p_{y|x, \theta_t}(y|x_i) \log_e p_{y|x, \theta_t}(y|x_i)$ を示せ。
- (6) $Q(\theta_{t+1}, \theta_t) \geq Q(\theta_t, \theta_t)$ であるとき、 $L(\theta_{t+1}) \geq L(\theta_t)$ が成り立つことを示せ。

【No. 7】 格子点間の間隔が Δx である 1 次元格子点をランダムウォークする粒子を考える。粒子は、一定の時間間隔 Δt ごとに、右又は左に等確率(すなわち $\frac{1}{2}$ ずつの確率)で Δx ずつ移動する。粒子が n 回の移動後に位置 $m\Delta x$ に存在する確率を $W(m, n)$ ($m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$; $n = 0, 1, 2, \dots$) とする。粒子は原点から出発する。すなわち

$$W(m, 0) = \begin{cases} 1 & (m = 0) \\ 0 & (m \neq 0) \end{cases}$$

とするとき、以下の設問に答えよ。

- (1) 粒子が 3 回の移動後に位置 Δx に存在する確率 $W(1, 3)$ 及び位置 $2\Delta x$ に存在する確率 $W(2, 3)$ を、それぞれ求めよ。
- (2) 粒子が $n + 1$ 回の移動後に位置 $m\Delta x$ に存在する確率 $W(m, n + 1)$ と、 n 回の移動後に位置 $(m \pm 1)\Delta x$ に存在する確率 $W(m \pm 1, n)$ との間の関係式を示せ。
- (3) 粒子が原点から出発して、右に合計 n_+ 回、左に合計 n_- 回移動した結果、位置 $m\Delta x$ に到達したとする。粒子が $n = n_+ + n_-$ 回の移動後に位置 $m\Delta x = (n_+ - n_-)\Delta x$ に存在する確率を、 n_+ 、 n_- を用いて表せ。
- (4) (3)の確率を $W(m, n)$ として m, n を用いて表せ。
- (5) (4)の確率 $W(m, n)$ が、(2)の関係式を満たすことを示せ。

これ以降は、 n, m は十分に大きく、 $\frac{m}{n} \ll 1$ とする。

- (6) 長さ Δl の範囲に存在する格子点の平均個数を求めよ。また、この中で多数回の移動後に粒子が到達可能な格子点の平均個数を求めよ。このとき、移動回数によって粒子が到達可能な格子点と不可能な格子点があることに、注意せよ。
- (7) 粒子が n 回の移動後に微小区間 $[m\Delta x, m\Delta x + dx]$ に存在する確率を $P(m\Delta x, n\Delta t)dx$ とする。このとき、 $P(m\Delta x, n\Delta t)dx$ を $W(m, n), dx, \Delta x$ を用いて表せ。
- (8) 格子点の位置を $x = m\Delta x$ 、時刻を $t = n\Delta t$ とする。粒子が微小区間 $[x, x + dx]$ に存在する確率 $P(x, t)dx$ を、 $t, x, dx, D = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t}$ を用いて表せ。ただし、 $W(m, n)$ の自然対数 $\log_e W(m, n)$ が

$$\log_e W(m, n) \cong \frac{1}{2} \log_e \frac{2}{\pi n} - \frac{n}{2} \left(\frac{m}{n} \right)^2$$
 と近似できることを用いてよい。
- (9) (8)で求めた $P(x, t)$ の、適当な時刻 t での概形を描け。また、 $P(x, t)$ の幅及び高さが、時間 t とともにどのように変化するか説明せよ。
- (10) (8)で求めた $P(x, t)$ が拡散方程式

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}$$

を満たすことを示せ。

【No. 8】 頂点集合を V 、枝集合を E とする無向グラフ $G = (V, E)$ を考える。グラフの枝集合 T が全域木であるとは、 T が閉路を含まず、かつグラフ (V, T) (頂点集合が V で枝集合が T であるグラフ) が連結であることと定義される。以下の設問に答えよ。

(1) 次の命題 1 を証明せよ。

命題 1 : $G = (V, E)$ に全域木が存在するための必要十分条件は、 G が連結であることである。

グラフのカットとは、頂点集合 V の分割 (V', V'') (すなわち、 V' と V'' は共に非空で $V' \cap V'' = \emptyset$, $V' \cup V'' = V$ を満たす) のことである。カット (V', V'') に対し、 V' と V'' を結ぶ枝全体の集合をカットセットと呼び、 $\tilde{E}(V', V'')$ と表す。

全域木 T の定義より、任意の閉路 C に対して、 T に含まれない C の枝が一つ以上存在する。一方、次の性質は、任意のカットセット D に対して、全域木 T に含まれる D の枝が一つ以上存在することを述べている。

命題 2 : $G = (V, E)$ をグラフとする。

(i) G が連結であるための必要十分条件は、任意のカットセット $\tilde{E}(V', V'')$ が非空であることである。

(ii) G の任意の枝集合 T に対し、 T が全域木であるための必要十分条件は、 T が閉路を含まず、かつ G の任意のカットセット $\tilde{E}(V', V'')$ に対して、 $T \cap \tilde{E}(V', V'') \neq \emptyset$ が成り立つことである。

(2) 命題 2 (i) を証明せよ。

(3) 命題 2 (ii) を証明せよ。

(4) 閉路とカットセットの共通部分に関して成り立つ性質について述べた次の命題 3 を証明せよ。

命題 3 : グラフ G の任意の閉路 C とカットセット D に対して、共通部分 $C \cap D$ が非空の場合、その要素数は 2 以上かつ偶数である。

二つの集合 A, B に対して、 A の要素から $A \cap B$ の要素を取り除いて得られる集合を $A \setminus B$ と表す。すなわち、 $A \setminus B = \{e | e \in A, e \notin B\}$ である。全域木 T に対し、 T に含まれない枝 f を加えると、枝 f を含む閉路がちょうど一つできる。この閉路を、全域木 T と枝 $f \in E \setminus T$ に関する基本閉路と呼び、 $C(T, f)$ と表す。全域木 T から T に含まれる 1 本の枝 e を取り去ると、ちょうど二つの部分 T', T'' に分かれるが、それらに含まれる頂点集合をそれぞれ V', V'' とする。このとき、 (V', V'') は頂点集合 V の分割となっているが、カットセット $\tilde{E}(V', V'')$ を、全域木 T と枝 $e \in T$ に関する基本カットセットと呼び、 $D(T, e)$ と表す。

次の定理は、基本閉路や基本カットセットを使って全域木の枝を入れ替えることによって、新たな全域木が得られることを述べている。

定理 4 : $T \subseteq E$ をグラフ $G = (V, E)$ の任意の全域木とする。

(i) 任意の枝 $e \in T$ 及び枝 $f \in D(T, e)$ に対し、枝集合 $T - e + f$ は全域木である。

(ii) 任意の枝 $f \in E \setminus T$ 及び枝 $e \in C(T, f)$ に対し、枝集合 $T + f - e$ は全域木である。

なお、記号 $T - e + f$ は、集合 T より要素 e を取り去って要素 f を加えることにより得られる集合 $(T \setminus \{e\}) \cup \{f\}$ を表す。同様に、記号 $T + f - e$ は、集合 $(T \cup \{f\}) \setminus \{e\}$ を表す。

(5) 定理 4(i) を証明せよ。

(6) 定理 4(ii) を証明せよ。

一つの連結なグラフには、全域木が一般に複数存在するが、全域木の枝数は、全域木の選び方によらずに一定で、頂点の総数より 1 だけ少ない。グラフの各枝 $e \in E$ に長さ $d(e)$ が与えられたとする。このとき、枝の部分集合 T の総長を $d(T) = \sum_{e \in T} d(e)$ と表す。 $d(T)$ を最小にする全域木 T のことを最小木と呼び、最小木を求める問題のことを最小木問題と呼ぶ。最小木問題にはよく知られた最適性条件がある。

定理 5 : グラフ $G = (V, E)$ の任意の全域木 T に対し、以下の 3 条件は等価である。

(i) T は G の最小木である。

(ii) 任意の $e \in T$ と $f \in D(T, e)$ に対して $d(e) \leq d(f)$ が成り立つ。

(iii) 任意の $f \in E \setminus T$ と $e \in C(T, f)$ に対して $d(e) \leq d(f)$ が成り立つ。

(7) 定理 5 において「(i) \Rightarrow (ii)」及び「(i) \Rightarrow (iii)」が成り立つことを示せ。

(8) グラフの閉路を調べることにより、最小木に含まれない枝を少なくとも 1 本見つけられることを述べている次の定理 6 を証明せよ。

定理 6 : $G = (V, E)$ をグラフとする。 $C (\subseteq E)$ をグラフ G の任意の閉路とする。 C の中で最も長い枝を e とすると、 e を含まない最小木が存在する。

(9) 与えられた連結グラフに対して、次のような局所探索法のアルゴリズムを適用する。ただし、グラフの枝数を m 、頂点数を n とおく。

手順 0 : 適当に見つけた全域木を T とおく。残りの枝 $E \setminus T$ に適当な順番で番号 $f_1, f_2, \dots, f_{m-n+1}$ を付ける。 $k := 1$ とおく。

手順 1 : 基本閉路 $C(T, f_k)$ において最も長い枝の一つ e_k に対し、 $T := T + f_k - e_k$ とおく。

手順 2 : $k = m - n + 1$ ならば枝集合 T を出力し、終了する。そうでなければ $k := k + 1$ とおき、手順 1 に戻る。

この局所探索法が最小木を求めることを示せ。

【No. 9】 力学及び電磁気学に関する以下の I、II の設問に答えよ。

I. 力学に関する以下の問いに答えよ。

質量 m の質点が中心力を受けながら 3 次元空間を運動する場合を考える。デカルト座標を用いて質点の位置を $\mathbf{r} = (x, y, z)$ と表し、ポテンシャルを $V(r)$ とする。ただし、 $r = |\mathbf{r}|$ である。

- (1) 質点の運動方程式を書け。
- (2) 運動方程式を用いて、力学的エネルギー保存の式を導出せよ。
- (3) 運動方程式を用いて、角運動量保存の式を導出せよ。

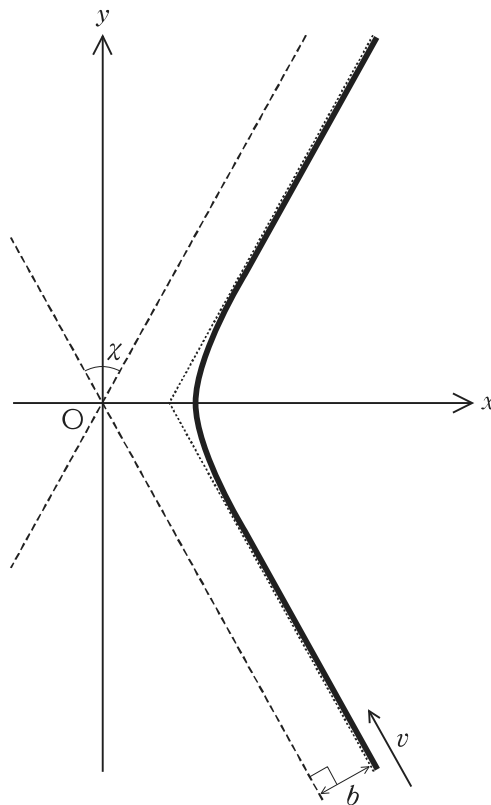
以下では、 a を正の定数として $V(r) = \frac{a}{r}$ とし、質点の運動を $z = 0$ の平面内に限定する。図のように、質点を無限遠から原点 O 近傍に向けて衝突パラメータ b 、速さ v で入射すると、質点は双曲線軌道を描きながら原点近傍に近づいた後、無限遠に散乱角 χ で散乱された。点線は双曲線の漸近線を表し、破線は漸近線に平行で原点を通る直線を表す。質点の位置 (x, y) を極座標を用いて

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi$$

と表すと、力学的エネルギー保存の式と角運動量保存の式より、 $r(\phi)$ に関する微分方程式

$$E = \frac{L^2}{2mr^4} \left(\frac{dr}{d\phi} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{a}{r}$$

が得られる。ただし、 $E (> 0)$ は力学的エネルギー、 L は角運動量の z 成分である。



- (4) 質点が原点に最も近づいたときの距離($r(\phi)$ の最小値)を、 m, a, E, L を用いて表せ。
- (5) $u = \frac{1}{r}$ と変数変換して、 $u(\phi)$ に関する微分方程式を導出せよ。また、 $u(\phi)$ を m, a, E, L, ϕ を用いて表せ。ただし、 $u(\phi)$ は $\phi = 0$ で最大になるとする。
- (6) E 及び L を、 m, b, v のうち必要なものを用いて表せ。
- (7) 衝突パラメータ b を、 m, a, v, χ を用いて表せ。
- (8) 一様かつ一定の速さで多数の質点を原点に向けて入射したとき、角度 χ と $\chi + d\chi$ の間に散乱される質点の数は微分散乱断面積 $d\sigma = 2\pi b|db|$ に比例する。散乱角 $\frac{\pi}{3} \leq \chi \leq \frac{2\pi}{3}$ の範囲に散乱される質点の数を N_1 、散乱角 $\frac{2\pi}{3} \leq \chi \leq \pi$ の範囲に散乱される質点の数を N_2 としたとき、 $\frac{N_2}{N_1}$ の値を求めよ。

II. 電磁気学に関する以下の問いに答えよ。

z 軸の正方向を向く大きさ E_0 の一様な電場 \mathbf{E}_0 のもとに、原点を中心とする半径 a の誘電体球がある場合について考える。誘電体の誘電率を ϵ_1 、誘電体外部の誘電率を ϵ_0 とする。

電位 ϕ を用いて電場は $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ のように表され、 ϕ は、球内 $0 < r \leq a$ では $\phi = \phi_1(r, \theta)$ 、球外 $r > a$ では $\phi = \phi_2(r, \theta)$ として、次のように表される。

$$\begin{aligned}\phi_1(r, \theta) &= c_1 r \cos\theta, \\ \phi_2(r, \theta) &= \left(c_2 r + c_3 \frac{a^3}{r^2} \right) \cos\theta\end{aligned}$$

ここで、 r は誘電体球の中心からの距離、 θ は z 軸とのなす角であり、また c_1, c_2 及び c_3 は定数である。なお、必要ならば、 $\mathbf{A} = \nabla f$ の成分 A_r, A_θ は次で与えられることを用いてよい。

$$A_r = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad A_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

- (1) 無限遠 $r \rightarrow \infty$ における ϕ_2 の形より、 c_2 を求めよ。
- (2) 球の表面 $r = a$ では、電場の接線成分 E_θ が連続、かつ電束密度 \mathbf{D} の法線成分 D_r が連続である。この境界条件と(1)の結果より、定数 c_1 及び c_3 を求めよ。
- (3) 誘電体球の分極を $\mathbf{P} = \alpha \mathbf{E}_0$ のように表すとき、定数 α を求めよ。
- (4) 誘電体球内部の電場 \mathbf{E} を、分極 \mathbf{P} を用いて $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \beta \mathbf{P}$ のように表すとき、定数 β を求めよ。
- (5) z 軸上の $z = 2a$ における電場を $\mathbf{E} = (1 + \gamma) \mathbf{E}_0$ のように表すとき、定数 γ を求めよ。

【No. 10】 量子力学に関する以下の I、II の設問に答えよ。ただし、虚数単位を i とする。

I. 質量 m の 1 次元調和振動子について考える。この調和振動子の固有角振動数を ω 、位置演算子を x 、運動量演算子を p とする。

- (1) 調和振動子に対するハミルトニアン H の表式を書け。
- (2) 演算子 a, a^\dagger を $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right)$, $a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - \frac{ip}{m\omega}\right)$ のように定義する。交換関係 $[a, a^\dagger]$ の値を求めよ。
- (3) H を a, a^\dagger を用いて表せ。
- (4) 基底状態 $|0\rangle$ を $a|0\rangle = 0$ により、第 n 励起状態 $|n\rangle$ を $|n\rangle = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle$ により定義する。 $|n\rangle$ が H の固有状態であることを示し、その固有値 E_n を求めよ。
- (5) 四つの演算子 $A = x, p, x^2, p^2$ の基底状態に関する期待値 $\langle A \rangle = \langle 0|A|0\rangle$ をそれぞれ求めよ。
- (6) 基底状態の波動関数 $\psi_0(x)$ は、関係式 $a|0\rangle = 0$ を $\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{ip}{m\omega}\right)\psi_0(x) = 0$ と読み替えた微分方程式より求められる。 $\psi_0(x)$ を求めよ。規格化はしなくてもよい。

II. 1 次元調和振動子の波動関数と古典的な運動との対応関係について、時間 t に依存するシュレディンガー方程式を満たす規格化された波動関数

$$\psi(x, t) = \pi^{-\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{(x - \cos t)^2}{2} - i\left(\frac{t}{2} + x \sin t - \frac{1}{4} \sin 2t\right)\right]$$

を用いて考える。ただし、簡単のため $\hbar = m = \omega = 1$ とした。

- (1) 確率密度 $P(x, t) = |\psi(x, t)|^2$ を求めよ。また、 $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ の場合について $P(x, t)$ を図示し、時間とともにどのように変化するか説明せよ。
- (2) この波動関数に関する位置演算子 x と運動量演算子 p の期待値 $\langle x \rangle, \langle p \rangle$ を求めよ。また、両者はどのような関係にあるか説明せよ。
- (3) 演算子 A の標準偏差を $\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$ とするとき、 $\Delta x \Delta p$ の値を求めよ。
- (4) 任意の複素数 c を用いて、時間に依存するシュレディンガー方程式を満たす状態

$$|c(t)\rangle = A_c \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{\sqrt{n!}} e^{-i(n-\frac{1}{2})t} |n\rangle$$

を考える。 $|c(t)\rangle$ は演算子 a の固有状態であり、 $a|c(t)\rangle = ce^{-it}|c(t)\rangle$ を満たす。この関係を確かめよ。ただし、 $A_c = \exp\left(-\frac{1}{2}|c|^2\right)$ は規格化定数であり、 $\langle c(t)|c(t)\rangle = 1$ が成り立つ。

- (5) $|c(t)\rangle$ のエルミート共役な状態 $\langle c(t)|$ は、 $\langle c(t)|a^\dagger = \langle c(t)|c^* e^{it}$ の関係を満たす。ただし、 c^* は c の複素共役である。 $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ として、 $|c(t)\rangle$ に関する期待値 $\langle x \rangle, \langle p \rangle$ を求めよ。

【No. 11】 物性物理学に関する以下の設問に答えよ。

z 方向に狭いポテンシャル井戸を形成して電子を閉じ込めると、 z 方向の運動に関する電子のエネルギーは離散的な準位となる。この準位の基底状態だけが占有されており、 xy 平面内では自由に運動できる電子系を2次元電子系という。以下では、 x 、 y 方向の一边が L の正方形の2次元電子系を考える。ただし、 L は十分に大きいものとする。電子の質量を m とし、電子はスピン縮重しているものとする。また、電気素量を e 、プランク定数を h ($\hbar = \frac{h}{2\pi}$)、虚数単位を i 、ボルツマン定数を k_B で表すものとする。

- (1) 波数 \mathbf{k} の x 、 y 成分をそれぞれ k_x 、 k_y として、電子の波動関数を $\psi(x, y) = \phi_0 \exp[i(k_x x + k_y y)]$ とおく。波動関数が x 、 y 方向でそれぞれ周期境界条件を満たすものとするとき、 n_x 、 n_y を整数として、 k_x 、 k_y をそれぞれ表せ。
- (2) 波数の大きさが $|\mathbf{k}| = k$ 以下である電子の状態数を $N(k)$ とする。スピン縮重度を考慮すると $N(k) = \frac{k^2}{2\pi} L^2$ と表されることを示せ。また、これを用いて、波数 k と $k + dk$ の間の単位面積当たりの状態数 $D(k) dk$ を求めよ。
- (3) 電子の z 方向の基底状態のエネルギーを E_0 とすると、電子のエネルギーは、 $E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + E_0$ と表される。エネルギーの関数として、単位面積当たりの状態密度 $D(E)$ を求めよ。
- (4) 単位面積当たりの電子数を N_S とする。このときのフェルミエネルギーを E_F 、フェルミ波数を k_F とするとき、 E_F 及び k_F を、それぞれ N_S を用いて表せ。ただし、フェルミエネルギーは E_0 から測るものとする。
- (5) z 方向のポテンシャル井戸により形成される離散準位のうち、第1励起状態のエネルギーを E_1 とする。温度 $T = 0$ において、この電子系が純粋な2次元電子系となるためには、電子は離散準位の基底状態のみを占有していなければならない。そのための単位面積当たりの電子数 N_S の上限値を求めよ。
- (6) 温度 T におけるフェルミ-ディラックの分布関数 $f(E)$ は、化学ポテンシャルを μ とすると $f(E) = \left[\exp\left(\frac{E - \mu}{k_B T}\right) + 1 \right]^{-1}$ で表される。単位面積当たりの電子数 N_S を、 T 及び μ で表し、化学ポテンシャルの温度依存性を表す式を求めよ。
- (7) 電子の運動をドゥルーデのモデルで扱う。電子の平均衝突時間を τ とすると、2次元電子系の電気伝導度(シート伝導度)は、 $\sigma_{2D} = N_S \frac{e^2 \tau}{m}$ と表される。この σ_{2D} が、フェルミ波数 k_F 、電子の平均自由行程 ℓ 、ある定数 σ_0 を用いて $\sigma_{2D} = \sigma_0 k_F \ell$ と表されることを示し、 σ_0 の表式を求めよ。また、この σ_0 が電気伝導度(電気抵抗の逆数)の次元をもつことを示せ。

金属-酸化物-半導体からなる電界効果型トランジスタ(MOSFET)中での電子を考える。酸化物(絶縁体)と半導体との境界面に垂直に z 軸をとり、境界面を $z = 0$ とする。外部から z 方向に強い電場 E ($E > 0$) を加えたときの伝導電子に対するポテンシャルを $V(z) = eEz$ ($z > 0$) とする。また、絶縁体中のポテンシャルは $V(z) = \infty$ ($z \leq 0$) とする。このとき、電子の波動関数 $\psi(x, y, z)$ は、

$$\psi(x, y, z) = \begin{cases} u(z)\exp[i(k_x x + k_y y)] & (z > 0) \\ 0 & (z \leq 0) \end{cases}$$

と表され、 $u(z)$ はシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u(z)}{dz^2} + V(z)u(z) = \epsilon u(z)$$

を満たす。なお、以下では簡単のため、温度は絶対零度であるとし、変分法で基底状態を求める。

(8) $u(z)$ の基底状態の試行関数として $u(z) = z \exp(-az)$ を用い、エネルギーの平均値 $\langle \epsilon \rangle$ を求めよ。ただし、 a は正の定数である。なお、必要ならば、以下の公式を用いてよい。

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\beta x} dx = \frac{n!}{\beta^{n+1}} \quad \text{ただし、}\beta > 0, n \text{ は正の整数}$$

(9) $\langle \epsilon \rangle$ の値が最小となる a を求めよ。また、このときの $\langle \epsilon \rangle$ の最小値 $\langle \epsilon \rangle_{\text{Min}}$ を求めよ。

(10) (9) で求めた $\langle \epsilon \rangle_{\text{Min}}$ は電場 E に関して単調に増加することを示している。このことをポテンシャルの空間分布などの観点から簡潔に説明せよ。

(11) ポテンシャル $V(z)$ 及び $u(z)$ のグラフの概形を描け。また、電子が負の電荷をもつこと及び他の電子の遮蔽効果を考慮した場合、遮蔽されたポテンシャル $\bar{V}(z)$ やこれによる基底状態を表す $\bar{u}(z)$ はどのようなになるか、考え方を簡潔に説明し、 $\bar{V}(z)$ と $\bar{u}(z)$ のグラフの概形を描け。

(12) 本問で扱ったように、物質中に 2 次元電子系を実現するためには、ある方向に電子を閉じ込める必要がある。MOSFET 構造の他に、どのような 2 次元電子系があるか。電子の閉じ込めの方法、その物質名(又は構造名)や、その特徴などを整理して簡潔に説明せよ。

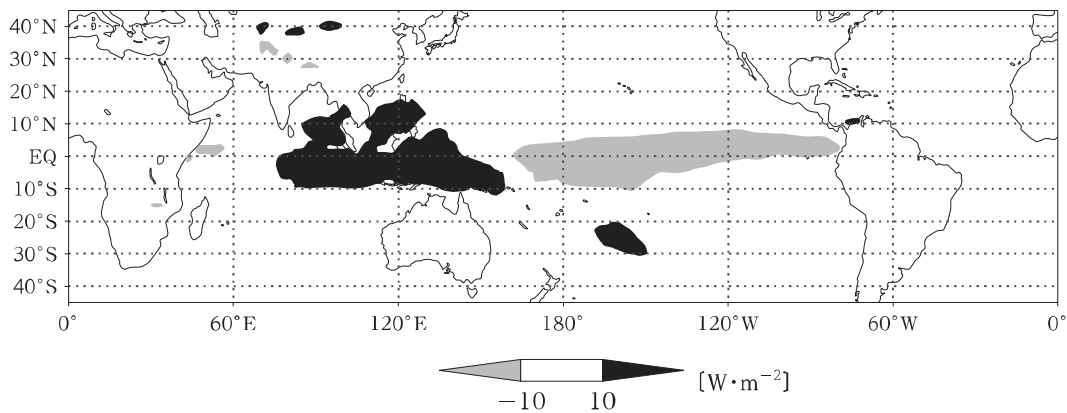
【No. 12】 地球物理学に関する以下のⅠ、Ⅱ、Ⅲの設問に答えよ。

Ⅰ. エルニーニョ現象とは、東部太平洋赤道域において、海面水温が平常の年よりも高くなり、またその状態が半年から1年半程度続く現象である。逆に同海域において海面水温が平常の年よりも低くなる場合はラニーニャ現象と呼ばれる。エルニーニョ／ラニーニャ現象及びそれらと同時に発生する熱帯大気の変動(南方振動)を合わせてエルニーニョ・南方振動(ENSO)と呼ぶ。

(1) エルニーニョ現象発生時に、東部太平洋赤道域の海面水温が高い状態が発達し、維持されることの説明として、ビヤークネス・フィードバックと呼ばれる機構が広く認められている。この機構について、次の語句を全て用いて10行以内で説明せよ。ただし、解答中の用いた語句に下線を引くこと。

〔語句： ウォーカー循環、水温躍層、海面水温、対流、貿易風〕

(2) ENSOに関わる大気の状態を監視するために、外向き長波放射量(OLR)と呼ばれる観測量がしばしば参照される。図Ⅰは、エルニーニョ現象又はラニーニャ現象が発生した年に観測されたOLRの値を、平常の値(ここでは、その年を含む連続する30年間の値の平均)からの差で示したものである。この年にはどちらの現象が発生したと考えられるか、対流圏大気における鉛直温度分布と、当該波長領域における大気の放射率の変化に着目し、根拠とともに10行以内で説明せよ。



図Ⅰ

II. エルニーニョ／ラニーニャ現象の維持・発達がビヤークネス・フィードバックで説明される一方で、現実の時間発展を説明するためにはエルニーニョ／ラニーニャ現象を終息させる機構も必要となる。ENSO の理論モデルの一つである再充填振動子理論では、風応力の変動により生じる海水の南北輸送、及びそれに伴う太平洋赤道域の貯熱量の変動によりエルニーニョ／ラニーニャ現象の終息が説明される。ここでは、風応力と海水の南北輸送の関係を調べる。

水平東向きに x 軸、水平北向きに y 軸、平均海面で $z = 0$ となるよう鉛直上向きに z 軸をとり、密度一定の海水の、大規模で時間スケールの長い運動を考える。流速を $\mathbf{u} = (u, v, w)$ で表すことにし、コリオリ力と圧力傾度力の釣合いを考えると、水平方向の運動方程式と連続の式は

$$-fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \dots\dots①$$

$$fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \dots\dots②$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots③$$

で与えられる。ここで、 ρ は海水の密度、 f はコリオリパラメータ、 p は圧力である。

- (1) f_0 と β を定数としてコリオリパラメータを $f = f_0 + \beta y$ と近似(ベータ平面近似)するとき、 $\frac{\partial w}{\partial z}$ を f_0 , β , v , y を用いて表せ。 $f_0 + \beta y$ は 0 でないとしてよい。

式①、②では摩擦の影響を無視して流れの地衡流成分を考えた。一方、海面付近では、海面に働く風応力のため、海面付近に非地衡流成分を伴うエクマン層が生じる。このとき、エクマン層の厚みを D ($D > 0$) とすると、エクマン層下端 ($z = -D$) における鉛直流 w_0 と風応力 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y, 0)$ は

$$w_0 = \frac{\mathbf{k} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\tau})}{\rho f_0} \quad \dots\dots④$$

という関係にある。ここで、 \mathbf{k} は鉛直単位ベクトルである。

式④の関係を踏まえ、(1)で考えた海洋内部の運動に改めて注目する。

- (2) 赤道上以外のある地点を考え、その地点で $y = 0$ とする ($f_0 \neq 0$)。海底を $z = -H$ (H は $H > D$ を満たす定数)とし、海水の南北流速を海洋内部(海底からエクマン層下端まで)で鉛直積分したものを

$$V = \int_{-H}^{-D} v dz$$

とする。 V を、風応力の渦度の鉛直成分 $\mathbf{k} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{\tau})$ を含む形で表せ。

(3) 東西一様の海上で、南北風応力 τ_y は 0 であり、東西風応力 τ_x の南北分布が図 II のようになっているとする。(2) で求めた関係を用いると、北緯 5 度において東西幅 16,000 km にわたって V を積算して求めた海水の南北輸送量はおよそいくらになるか。北向きを正として Sv 単位で求めよ ($1 \text{ Sv} = 10^6 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$)。

ただし、 $\rho = 1.0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ 、
 $\beta = 1.1 \times 10^{-11} \text{ s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ とし、緯度 1 度当たりの y の増分は 110 km である。

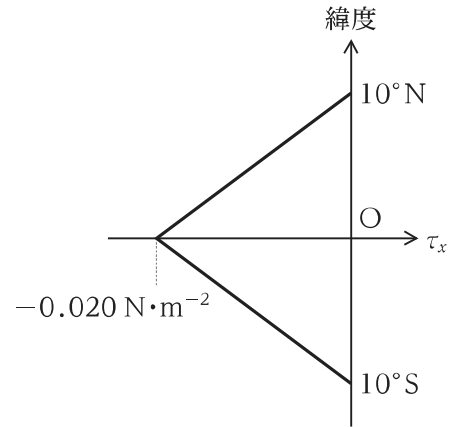


図 II

III. エルニーニョ/ラニーニャ現象の理解に関わる、海洋内部の波動について考える。

海洋内部における波動の伝播は 3 次元の運動方程式により記述されるが、適当な仮定の下では、その解を時間変化しない鉛直構造と水平伝播する波動に変数分離して解くことができる。そのとき、特定の鉛直構造をもつ波動の水平伝播は、仮想的な水深(等価深度)をもつ 1 層の流体における波動のそれと等しくなる。ここからは、そのような 1 層の流体を記述する浅水方程式をモデルとして用いて、赤道付近の海洋で観測される波動について議論する。

t を時間とする。水平東向きに x 軸、水平北向きに y 軸をとり、それぞれの方向の水平流を u , v とする。赤道上で $y = 0$ である。また水面の変動を η とする(上向きを正とし、静止状態の空間平均で $\eta = 0$ である。)。赤道付近の運動方程式及び連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \beta y v = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad \dots\dots ⑤$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \beta y u = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad \dots\dots ⑥$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \quad \dots\dots ⑦$$

のように近似される。ここで、 H は等価深度、 g は重力加速度の大きさ、 β はコリオリパラメータの y 微分であり、いずれも正の定数とする。

はじめに、式⑤、⑥、⑦において、南北流 v が恒等的に 0 であるような解を考える。

(1) 東西方向の運動方程式と連続の式から η を消去することにより、 u の t 、 x に関する偏微分方程式を導け。

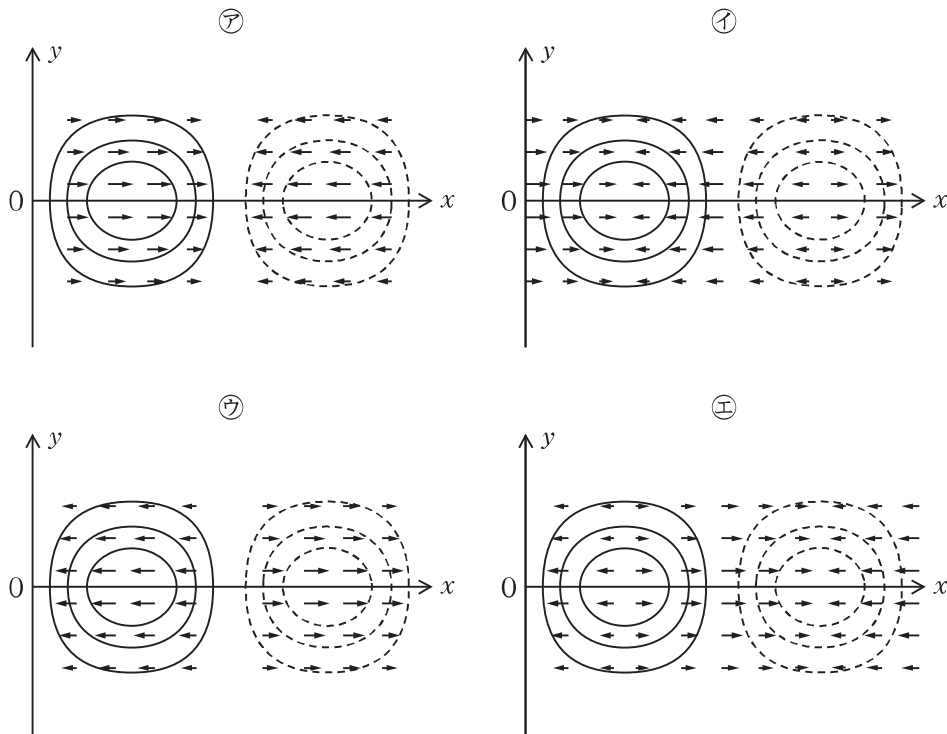
(2) (i) (1)で導いた偏微分方程式を解くと、東西それぞれの方向に進む波に対応する解が得られる。これらの解を求めよ。

(ii) 式⑤、⑥、⑦で $v = 0$ とおいた東西・南北方向の運動方程式から η を消去すると、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial t} = \beta y \frac{\partial u}{\partial x} \quad \dots\dots ⑧$$

が得られる。(i)で求めた解を式⑧に代入することにより、東西いずれの方向に進む波が赤道に束縛された波として許されるか議論せよ。

(3) (2)で求めた波動は赤道ケルビン波と呼ばれる。次の㉗~㉙はある瞬間の η を等値線(実線は正の値、破線は負の値)、 u を矢印(矢印の長さは流速の大きさを表す。)で模式的に示したものである。これらのうち、ある単一の波長をもつ赤道ケルビン波の水平構造を表現したものとして最も妥当なのはどれか。理由とともに答えよ。



(4) 太平洋赤道域における風応力の変動により水温躍層の変動を伴う赤道ケルビン波が生じ、(2)で求めた向き・速度で伝播し海面水温を変動させることがエルニーニョ／ラニーニャ現象の引き金となると考えられている(海洋における水温躍層の変動は、浅水方程式における水面の変動に対応する。)。この赤道ケルビン波はおよそ何か月で太平洋(東西幅 16,000 km)を横断するか。等価深度 H を 1 m、重力加速度の大きさ g を $10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ とし、整数で求めよ。

ここからは、南北流 v が 0 であるという仮定を取り除き、より一般的な波動を考える。

(5) 式⑤、⑥、⑦から以下の式⑨、⑩を導け。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - gH\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u = \left(gH\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \beta y\frac{\partial}{\partial t}\right)v \quad \dots\dots⑨$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - gH\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)v = \left(gH\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} - \beta y\frac{\partial}{\partial t}\right)u \quad \dots\dots⑩$$

(6) 式⑩の両辺に演算子 $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - gH\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$ を適用し式⑨を用いることにより、 v に関する以下の式⑪を導け。

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla^2 v - \frac{1}{gH}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\beta^2 y^2}{gH}v\right) + \beta\frac{\partial v}{\partial x}\right] = 0 \quad \dots\dots⑪$$

(7) ψ を y の関数とする。式⑪に

$$v = \psi(y) \exp(ikx - i\omega t) \quad \dots\dots⑫$$

を代入して、 ψ の y に関する常微分方程式を導け。 i は虚数単位、 k , ω は実定数とする。

(8) ここで、 $y \rightarrow \pm\infty$ のときに $\psi = 0$ となることを境界条件として課すと、

$$\frac{\omega^2}{gH} - k^2 - \frac{\beta k}{\omega} = (2n + 1)\frac{\beta}{\sqrt{gH}} \quad \dots\dots⑬$$

の分散関係を満たす場合に式⑪が

$$\psi_n(y) = A_n H_n(\xi) \exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right) \quad \dots\dots⑭$$

の一般解をもつ。ここで、 $\xi = \left(\frac{\beta}{\sqrt{gH}}\right)^{\frac{1}{2}} y$ であり、 n は非負整数、 A_n は定数、 $H_n(\xi)$ は n 次のエルミート多項式

$$H_n(\xi) = (-1)^n \exp(\xi^2) \frac{d^n}{d\xi^n} \exp(-\xi^2) \quad \dots\dots⑮$$

である。 $n = 1$ の場合の解のうち、ある k の値に対し振動数 ω の絶対値が最も小さいものは南北波数 1 の赤道ロスビー波と呼ばれる。南北波数 1 の赤道ロスビー波について、 k , ω の絶対値が小さい極限で位相速度を近似的に求め、その絶対値と向きを(2)、(3)で議論した赤道ケルビン波と比較せよ。

【No. 13】 地球物理学に関する以下の I ~ IV の設問に答えよ。

I. 慣性モーメントに関する以下の問いに答えよ。

- (1) 半径 a 、質量 M の薄い球殻の、中心を通る軸のまわりの慣性モーメントが $\frac{2}{3}Ma^2$ であることを示せ。ただし、必要ならば、次の不定積分を用いてよい。

$$\int \sin^3 \theta d\theta = -\frac{1}{3} \cos \theta (\sin^2 \theta + 2) + C \quad (C \text{ は定数})$$

- (2) (1) の結果を用いて、半径 a 、質量 M で内部が一様な球の、中心を通る軸のまわりの慣性モーメントが $\frac{2}{5}Ma^2$ であることを示せ。
- (3) xyz 直交座標系において、表面の方程式が

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

で与えられる楕円体がある。ただし、 $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ である。楕円体は内部が一様であり、質量は M である。この楕円体の x 軸、 y 軸、 z 軸のまわりの慣性モーメントをそれぞれ I_x , I_y , I_z とすると、

$$I_x = \frac{1}{5}M(b^2 + c^2)$$

$$I_y = \frac{1}{5}M(c^2 + a^2)$$

$$I_z = \frac{1}{5}M(a^2 + b^2)$$

であることを示せ(いずれか一つについて示せばよい)。ただし、この楕円体の体積が $\frac{4}{3}\pi abc$ であることを用いてよい。

II. 剛体の重心のまわりの回転運動について考える。物体に固定された直交座標系(物体座標系)を考え、その原点を物体の重心にとる。三つの慣性主軸の方向に x_1 軸、 x_2 軸、 x_3 軸をとる。 x_1 軸、 x_2 軸、 x_3 軸のまわりの物体の慣性モーメントをそれぞれ I_1 , I_2 , I_3 とする。物体の慣性テンソルは

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

で与えられる。

物体の角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$ とする(ただし、 T は転置を表す。)と、物体座標系において、回転運動を表すオイラーの方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H} = \mathbf{L} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

で与えられる。ただし、 t は時間、 \mathbf{H} は物体の角運動量であり、 $\mathbf{H} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega}$ で与えられる。 $\mathbf{L} = [L_1, L_2, L_3]^T$ は物体に働くトルクである。 $\frac{\partial}{\partial t}$ は物体座標系における微分を表すものとする。オイラーの方程式を各成分に分けて書くと

$$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 = L_1 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 = L_2 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 = L_3 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

となる。

- (1) 物体に働くトルクがなく、かつ $I_1 < I_2 < I_3$ であるとする。方程式系③~⑤は、 ω_1 , ω_2 , ω_3 のうちいずれか一つが 0 ではない定数で、ほかの二つが 0 という特殊な解をもつ。これらの解は、物体が三つの慣性主軸のいずれかのまわりに一様に回転する運動に対応している。これらの運動の安定性について考える。いま、初期において、物体が x_3 軸のまわりに一様に回転していたとする。 $\omega_1, \omega_2 \propto \exp at$ (a は定数) とおいて ω_1 及び ω_2 の時間発展を調べることで、この運動が安定であるかどうかを調べよ。

同様に、 x_1 軸、 x_2 軸のまわりの一様な回転の安定性についても調べよ。

- (2) 物体に働くトルクがなく、かつ $I_1 = I_2 \neq I_3$ であるとする。このとき、方程式系③~⑤は、 ω_1 及び ω_2 が周期的な振動を示すような解をもつ。そのような解を求め、 $I_1 = I_2 < I_3$ の場合と $I_1 = I_2 > I_3$ の場合とに分けて、物体の運動の態様を説明せよ。必要ならば、図を用いてもよい。
- (3) 物体に働くトルクがないとする。方程式系③~⑤は、(1)、(2)で考えたもののほかに、ある特殊な場合に自明な解をもつ(ただし $\boldsymbol{\omega} \neq \mathbf{0}$)。そのような解を見つけて、物体の運動の態様を説明せよ。
- (4) $I_1 = I_2 < I_3$ とする。物体が、回転軸のまわりに角速度に比例するトルクをもつ抵抗を受けているとする。方程式系③~⑤の解を求め、物体の回転軸が漸近的に x_3 軸に近づくことを示せ。

Ⅲ. 前問と同様にして、地球の回転運動について考える。地球に固定された直交座標系(地球座標系)を考え、その原点を地球の重心にとる。慣性モーメントが最大になる方向に x_3 軸をとり、それが地球の平均的な自転軸の方向(北極方向)に一致しているとする。それに直交して、赤道面内の東経 0 度の方向に x_1 軸、東経 90 度の方向に x_2 軸をとる。 x_1 軸、 x_2 軸、 x_3 軸のまわりの地球の慣性モーメントを、それぞれ I_1, I_2, I_3 とする。ただし、 $I_1 = I_2 < I_3$ であるとする。また、地球の角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega} = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$ とする。 ω_3 は地球の両極を結ぶ軸のまわりの回転角速度を表し、その平均値を $\Omega (> 0)$ とする。

いま、地球の回転運動に働くトルクがないとすれば、前問の方程式系③～⑤においてトルクを 0 とおいたものが成り立つ。Ⅱ(2)で考えたような周期的な運動が、実際に地球で起こっていることが観測から分かっており、それはチャンドラー運動(チャンドラー極運動)と呼ばれている。チャンドラー運動により、地球の自転軸が地表と交わる地点は、平均的な位置の周囲で、約 14 か月の周期で変動する。

このような運動は、地球の角速度ベクトルの変動として、

$$\boldsymbol{\omega} = [m_1\Omega, m_2\Omega, \Omega]^T$$

のように表される。ここで m_1, m_2 は無次元の微小量である。

以下では、回転速度の変動に伴う地球の変形は考えないものとする。

- (1) $\frac{2\pi}{\Omega}$ が地球の自転周期に対応する。この周期は、24 時間 00 分とは異なる。地球の自転周期の正確な定義を 1 行程度で説明せよ。また、その周期はおよそ何時間何分であるか記せ。
- (2) 地球の慣性モーメント I_1, I_2, I_3 について、

$$\frac{\text{(慣性モーメント)}}{\text{(地球の質量)} \times \text{(地球の半径)}^2}$$

という量を計算すると、0.33 程度の値になる。Ⅰ(2)で導いたように、内部が一様な球であれば、この量は 0.4 になる。この違いから、地球の内部について推定できることを 1～2 行程度で説明せよ。

- (3) 地球の自転の変動により、地球上の各地では遠心力が変化し、したがって重力変化が起こる。地表において、余緯度(90 度－緯度)が θ 、経度が φ である地点 P を考える。この地点における、地球の自転による遠心力のポテンシャルは

$$V = -\frac{1}{2}[\Omega^2 \mathbf{r}^2 - (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\omega})^2]$$

で与えられることを示せ。ただし、 \mathbf{r} は点 P の地球座標系での位置ベクトルである。また、この地点における重力加速度の変化が

$$\Delta g = \Omega^2 a \sin 2\theta (m_1 \cos \varphi + m_2 \sin \varphi)$$

で与えられることを示せ。ただし、 a は地球の半径である。

- (4) 観測によれば、(3)における m_1, m_2 は 10^{-6} のオーダーである。(3)で導いた重力加速度の変化は、地表ではどの程度の大きさになるか求めよ。

なお、地球の自転周期は 10^5 s、地球の半径は 6,000 km としてよい。

IV. 地表における重力加速度の計測について考える。絶対重力計は、真空中で物体(落体)を自由落下させ、経過時間と落下距離を精密に測ることによって、重力加速度の絶対値 g を測定する。

III(3)、III(4)で考えたような地球の回転変動に伴う重力加速度の変化は、最も高精度の重力計によって十分に検出可能な程度の大きさをもつ。そのような場合、落体が落下する間に重力加速度が変化することを考慮に入れる必要がある。以下では鉛直下向きに x 軸をとり、重力加速度の鉛直勾配を $\gamma = \frac{dg}{dx}$ と表す。 x が正の方向に増えるほど重力加速度は大きくなるので、 γ は正の値をとる。

(1) 地表において、 $\gamma \sim \frac{2g}{a}$ であることを示せ。ただし、 a は地球の半径である。

(2) (1)で評価した γ は、 g と a に値を入れると、 $3.08 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2}$ 程度の値となる。様々な場所において γ を実際に測ってみると、この値とは大きく食い違う場合がある。一般的な傾向として、どのような場所において、 γ の実測値がどのようなセンスで変化する(大きくなる・小さくなる)か、例を一つ挙げよ。

(3) 絶対重力計において、落体が時刻 $t = 0$ に位置 $x = 0$ から初速度 0 で落下を始めたとする。位置 $x = 0$ における重力加速度の大きさを g_0 とすると、自由落下の時間と距離の関係は、重力加速度の鉛直勾配を考慮しない場合、

$$x = \frac{1}{2}g_0t^2 \quad \dots\dots\textcircled{6}$$

と表される。重力加速度の鉛直勾配を考慮した場合、この関係が近似的に

$$x = \frac{1}{2}g_0t^2 + \frac{1}{24}\gamma g_0t^4 \quad \dots\dots\textcircled{7}$$

と表されることを示せ。ただし、 γ は一定であるとする。

(4) 落体が $t = 0$ から $t = 0.2$ (単位は秒)まで落下したとする。落下開始時と終了時の落体の位置だけを用いて重力加速度 g_0 を推定することを考える。重力加速度の鉛直勾配を考慮しない場合(式⑥)と考慮する場合(式⑦)とで、 g_0 の推定値にどれだけの誤差が生じるか評価せよ。ただし、 $\gamma = 3 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2}$ 、 $g_0 = 10 \text{ m/s}^2$ とする。また、時間と位置の測定には誤差はないものとする。

【No. 14】 地質学に関する以下の I、II の設問に答えよ。

I. 新生代は約 6600 万年前に始まり、現代へと続く時代である。新生代に関する以下の問いに答えよ。

(1) 日本の新生代の地層から化石として発見される代表的な生物として、以下の(a)、(b)、(c)の説明に該当するものをそれぞれ図 I のア～ケの中から選び、記号とその名称を答えよ。

(a) 日本の新第三紀を代表する軟体動物であり、約 1500 万年前には古瀬戸内海などのマングローブの発達する浅い海の海底に生息していた。

(b) 古第三紀の地層から産出する大型の単細胞生物であり、石灰質の殻をもっていた。エジプトのピラミッドでは、建材として使われた石灰岩にこれが含まれるものも見られる。

(c) 柱を束ねたような形状の臼歯をもつ四肢動物であり、水中で生活していたと考えられているが、生活様式などの詳細はよく分かっていない。

著作権の関係のため、掲載できません。

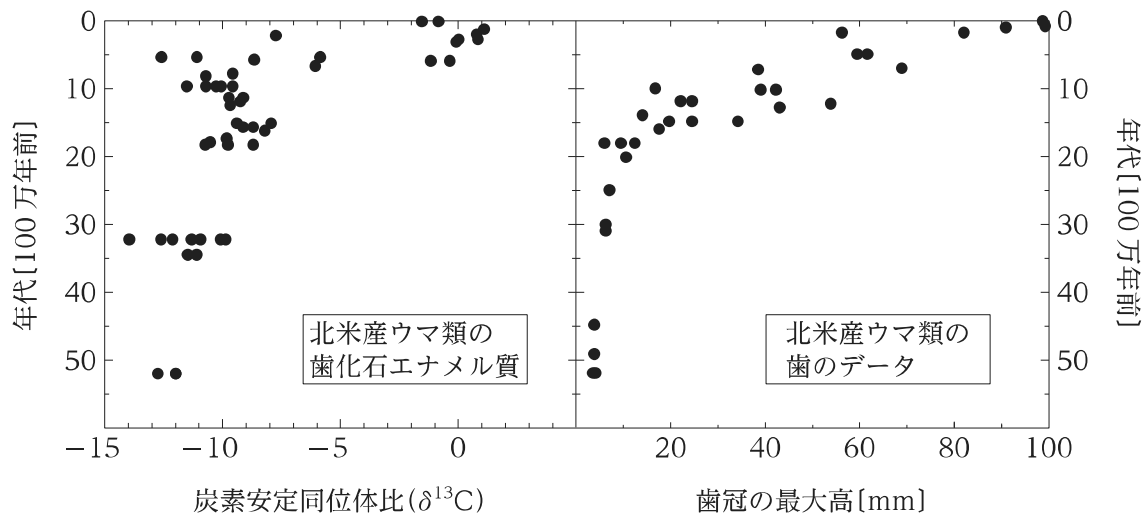
図 I

- (2) 新生代第四紀の間、地球の気候は周期的に変動してきたことが分かっている。第四紀の気候変動の周期性に関する以下の問いに答えよ。
- (a) 地球上のある地点における日射量は、単位面積の水平面に単位時間に到達する太陽放射のエネルギー量(kW/m^2)で与えられる。ある地点での正午頃の日射量が1年を通じて変化する要因について、地球の自転と公転の特徴とともに5～10行程度で説明せよ。
- (b) 地球上の各地点における日射量及びその季節変化は、1万年以上の時間スケールで周期的に変動しており、周期的な気候変動をもたらしている。地球上のある緯度における夏至・冬至の日射量を周期的に変化させる要因としては、太陽が単位時間当たりに出す総エネルギー量のほかに、地球の三つの軌道要素が知られている。この三つの軌道要素が日射量を変化させる仕組みについて、合わせて5～10行程度で説明せよ。ただし、これら三つの軌道要素による日射量の変動周期は約10万年、約4万年、約2万年とする。
- (c) 第四紀の氷期・間氷期サイクルは、日射量の約10万年・約4万年・約2万年周期の変動パターンとよく一致する一方、過去50万年間に約10万年周期の気温変動が最も卓越したことは、10万年周期の日射量の変動の規模が比較的小さいことと一致しない。このことは、入力である日射量の変動と出力である気温変化の間に比例関係が成り立たないことを示している。日射量の変動規模が気温の変動規模と比例しない理由について、5～10行程度で説明せよ。

(3) 新生代に起きた地球の環境変動と生物の進化に関して、以下の問いに答えよ。

(a) 新生代には、気候変動に伴い植生も世界的に変化した。新第三紀に繁栄した植物に、C4植物と呼ばれるグループがある。C4植物は光合成の際に最初に合成する物質が炭素数4のオキサロ酢酸($C_4H_4O_5$)であり、温帯及び熱帯地域に自生する草本植物がその多くを占めている。対して光合成の際に最初に炭素数3のホスホグリセリン酸($C_3H_7O_7P$)を合成する植物はC3植物と呼ばれ、木本植物のほとんどはC3植物である。C3植物とC4植物はその代謝様式の違いから、植物体を構成する炭素の安定同位体比($\delta^{13}C$)に違いがあり、C4植物はC3植物よりも高い $\delta^{13}C$ の値を示すことが知られている。一方、新生代の環境及び植生の変化に伴い急激な形態進化を遂げた植物食動物としては、ウマ類が挙げられる。

図IIは、北米大陸における過去6000万年間のウマ類化石について、歯のエナメル質に含まれる炭素の安定同位体比と、歯冠(歯のエナメル質に覆われた部分)の高さを時系列で示したグラフである。これらのグラフから読み取れるウマ類の食餌と植生の変化、及びその背景となった環境変化について、合わせて5~10行程度で説明せよ。



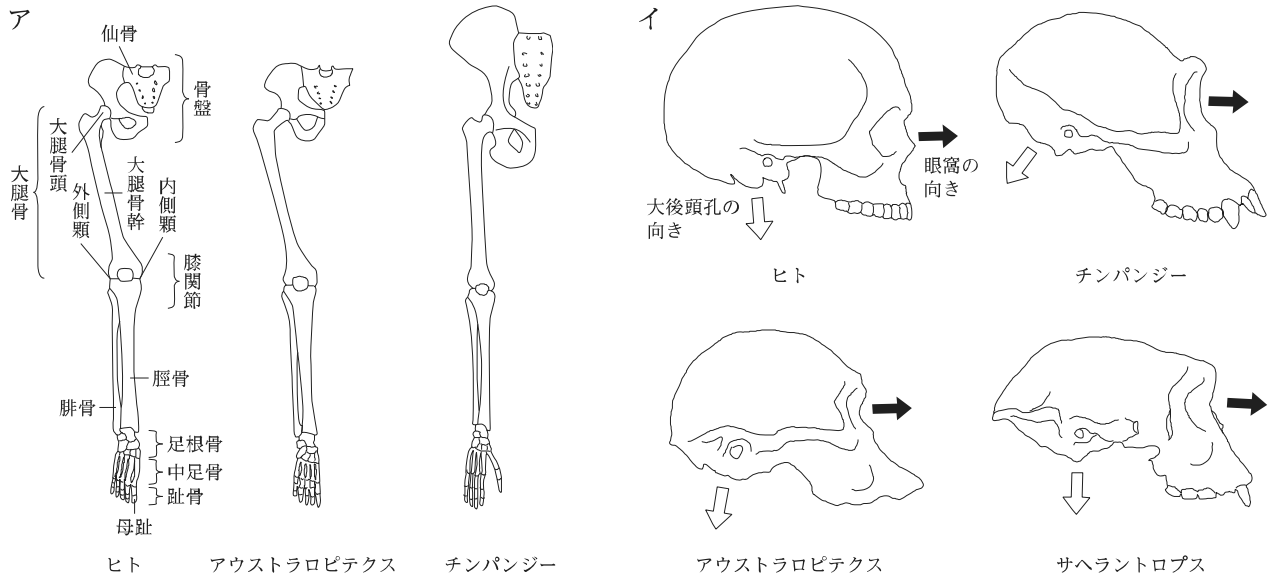
図II

(b) 新生代新第三紀中新世から鮮新世にかけて、アフリカ大陸では森林が縮小するとともに、霊長類の一部がヒトの祖先となる猿人に進化したとされる。

(i) 図IIIのアは、ヒト(現代人)、代表的な猿人であるアウストラロピテクス(*Australopithecus*)、及び現生の類人猿であるチンパンジーの腰から足先にかけての骨格を正面から見た模式図である。これらの図を比較して、アウストラロピテクスとヒト及びチンパンジーとの共通点・相違点を見だし、さらにそれぞれの共通点・相違点からアウストラロピテクスがどのような生活様式をもっていたか考察し、合わせて10~15行程度で説明せよ。

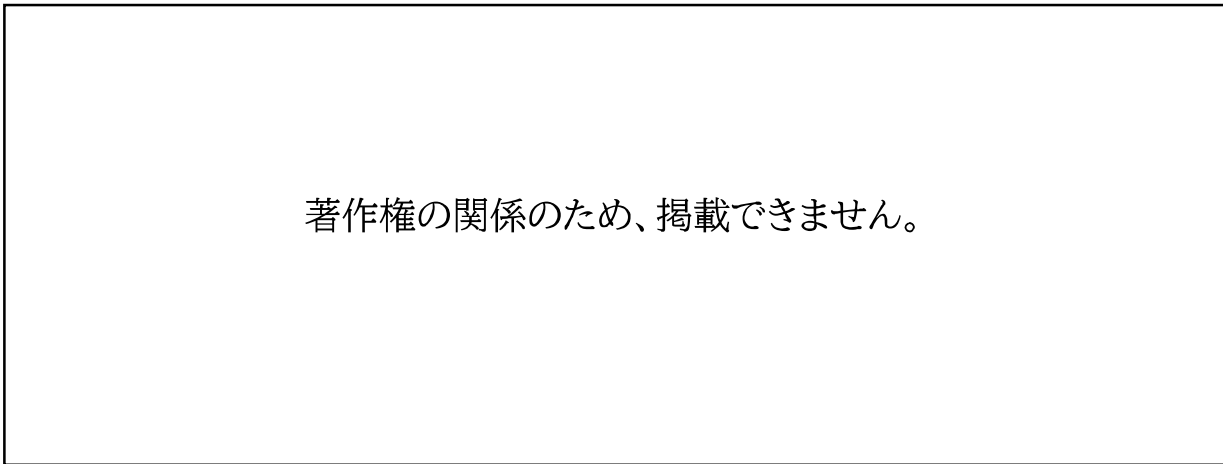
(ii) 2001年チャド中央部の砂漠で、約600~700万年前のものと推定される猿人の化石が発見され、サヘラントロプス(*Sahelanthropus*)と命名された。発見されたのは破損した頭部の骨格のみであるが、コンピューター上の3次元モデルを用いて復元を行った結果、骨の形態の精密な計測が可能となった。図IIIのイは、ヒト、チンパンジー、アウストラロ

ピテクス、サヘラントロプスの頭骨(いずれも上顎側)を右側面から見た様子を模式的に示した図である。それぞれ、頭骨から脊椎(背骨の中央を通る中枢神経)が出る孔である大後頭孔の向きと、眼球の入るくぼみである眼窩の向きが矢印で示されている。これらの図を比較した上で、サヘラントロプスがどのような姿勢で生活を行っていたと考えられるか、その根拠とともに5～10行程度で説明せよ。



図Ⅲ

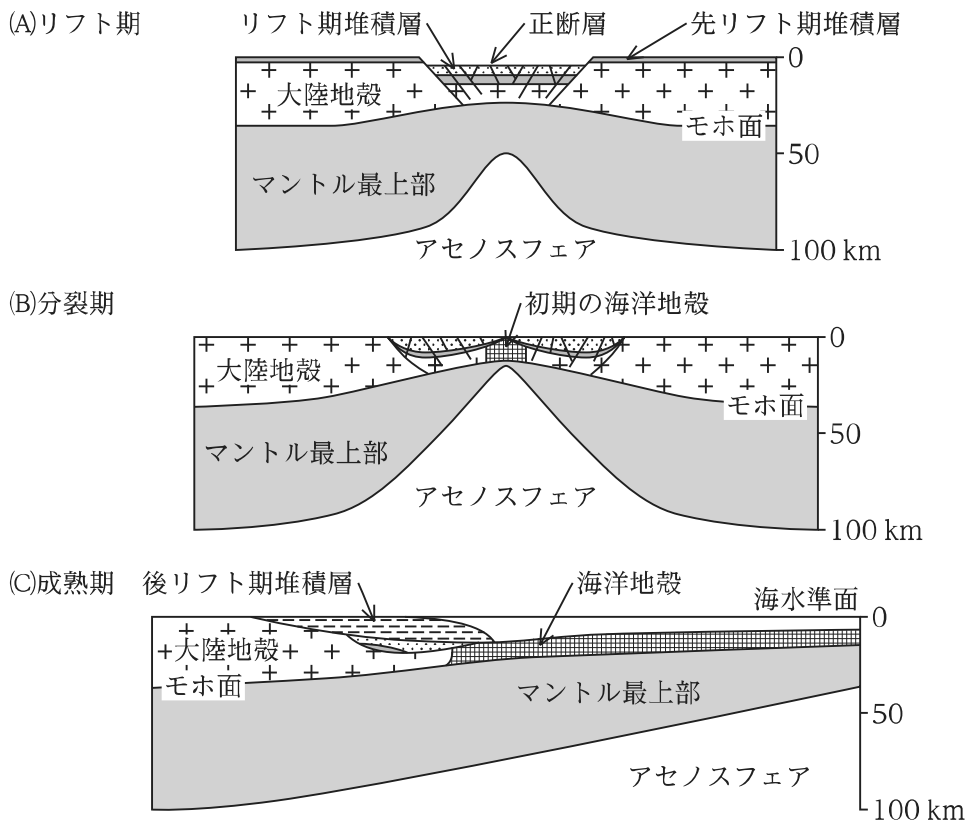
(c) 図Ⅳは、2004年の1月及び7月の海水面気圧分布図に、アジアにおける季節風の向きを矢印で書き入れたものである。新生代のアジアにおいては、冬季には大陸側から海洋側へと乾燥した空気が流れ、夏季には海洋側から大陸側へと湿った空気が流れるというように、季節による風向きや湿度の大きな変化が生じるようになった。このように、海洋と大陸との間に吹く風の向きの変化はどのような仕組みによって生じるかについて、また、新生代のアジアにおいて季節風が強化される原因と考えられる地史的な出来事について、合わせて5～10行程度で説明せよ。



図Ⅳ

II. 大陸縁部に関する以下の問いに答えよ。

- (1) 地球表層を覆う地殻は、大陸地殻と海洋地殻とに大きく二分される。大陸が分裂し始めるとそこは後にプレートの発散境界となり新たな海洋地殻が生成され、さらに海洋底拡大が進行すると、時間の経過とともに両側の大陸は互いにさらに離れていくことになる。また、海洋底拡大のある時期までは大陸縁部は受動的な造構環境にあるものの、いずれは活動的な縁部に転化する場合があります、そこはプレートの収束境界となる。最終的には海洋の閉塞によって超大陸が形成される。このような過程は、過去から現在まで繰り返り起こっていたと考えられている。
- (a) この過程の繰り返しを何と呼ぶか、またその概念に影響を与えた二つの学説は何か、答えよ。
- (b) 発散境界はどのような造構環境であるか、3行程度で説明せよ。
- (c) 大陸縁部のうち、受動的縁部では大陸地殻と海洋地殻が一つのプレートとして振る舞うのに対し、活動的縁部はプレートが沈み込む収束境界となっている。なぜプレートの沈み込みが始まるのか、プレートの密度差の観点から5～10行程度で説明せよ。
- (2) 図Iは、リフト帯から受動的な大陸縁部への模式的な進化過程における地質学的特徴をまとめた概念図である。この進化過程について、(A)、(B)、(C)の段階ごとにそれぞれ5行程度で説明せよ。



図I

(3) 図Ⅱは、反射法地震探査の結果を基にした大陸縁辺部の解釈断面図であり、受動的縁辺部と活動的縁辺部の例として、それぞれソマリア沖(図Ⅱの上)と四国沖(図Ⅱの下)を示す。ソマリア沖では、モホ面より上位に大陸地殻と海洋地殻が伏在し、それらは堆積層㉗と㉘に覆われている。四国沖では、海洋地殻の上面が南海トラフから陸側に向けて連続し、その上位に付加体が形成され、またその一部は斜面海盆の堆積層で被覆されている。どちらの縁辺部とも、陸側から海洋側に向けて緩やかに傾斜する海底地形を形成しているが、それぞれの海底下の地質状況は明瞭に異なっている。なお、断面図における縮尺と縦横比は異なる。

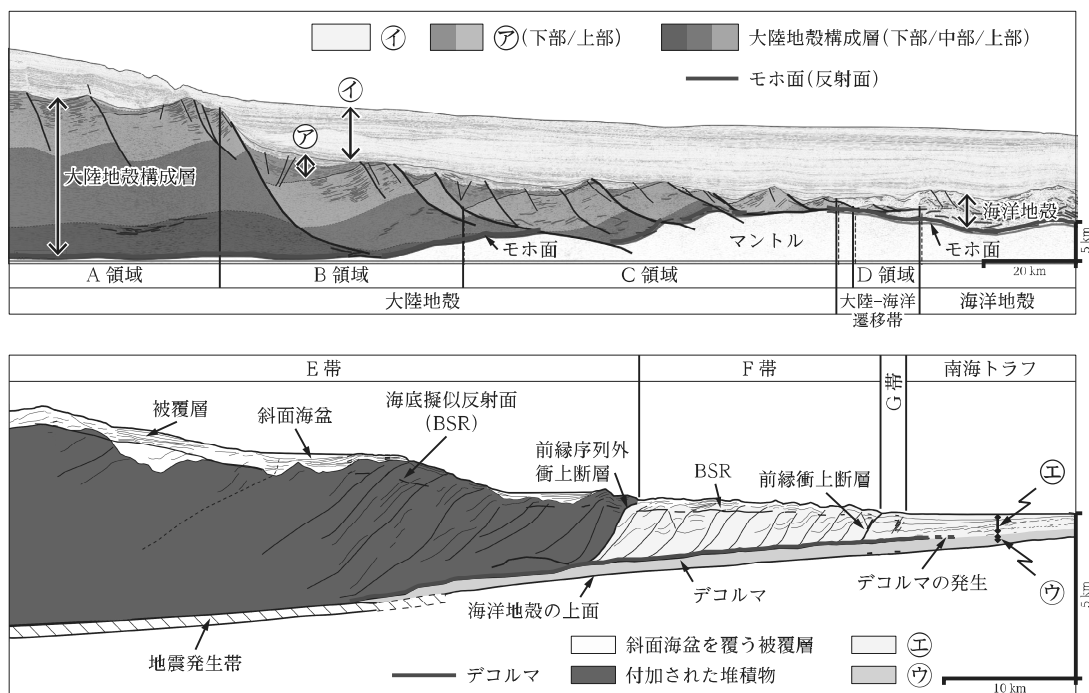
(a) 両大陸縁辺部の特徴について、次の語句を全て用いて5行程度で説明せよ。ただし、解答中の用いた語句に下線を引くこと。

[語句：大陸地殻、付加体、正断層、衝上断層、引張、重複、薄化、厚化]

(b) ソマリア沖の受動的縁辺部において、大陸地殻を覆う堆積層は下位の㉗と上位の㉘に区分される。それぞれの堆積時期について、A領域、B領域、C領域における断層群や大陸地殻の特徴に触れて、10行程度で説明せよ。

(c) 四国沖の活動的縁辺部では、四国海盆の海洋地殻を覆った半遠洋性堆積物と南海トラフを埋積した海溝充填堆積物が、デコルマを境に下位の㉘と上位の㉙に分離されているが、デコルマの直上・直下は同じ岩相を示している。デコルマが発生する層準を決定する一般的な要因を、10行程度で説明せよ。

(d) 四国沖の活動的縁辺部では、㉙の堆積層はどのような過程を経て付加体を形成するか、E帯、F帯、G帯の構造的特徴に触れて、5～10行程度で説明せよ。



図Ⅱ

【No. 15】 地質学に関する以下の I、II の設問に答えよ。

I. マグマ、火成岩及び温泉・熱水に関する以下の問いに答えよ。

(1) マグマの発生・分化と火成岩の分類・特徴に関する以下の問いに答えよ。

- (a) 岩石の融解によってマグマ(メルト)が形成される。岩石が融解する要因を二つ挙げ、それぞれどのような場所で起きているか、3行程度で説明せよ。
- (b) 岩石の部分溶融度の見積りやマグマの分化過程の研究では、「不適合元素(Incompatible elements)」が用いられている。「不適合元素」の特徴について2行程度で説明せよ。また、図Iは、3種類の玄武岩の不適合元素含有量を始原的のマントル物質で規格化した図である。このうち、プレート内アルカリ玄武岩と大西洋中央海嶺玄武岩は、それぞれ図Iの①、②、③のどれに該当するか、理由も含めて答えよ。
- (c) 地下深部で発生したマグマは、地表へ上昇する過程で、主として、結晶分化作用、マグマ混合、同化作用(混成作用)の三つの作用で変化し、その多様性を増す。それぞれどのような作用であるか、合わせて6行程度で説明せよ。
- (d) マグマが固化して火成岩が形成される。火成岩のうち、火山岩は、全岩化学組成を基に図IIのように分類されている。図中の空欄①、②、③に当てはまるものを、次の語句の中から選び出して入れよ。また、図IIの太い実線の下部の領域の火山岩(玄武岩、玄武岩質安山岩、安山岩、②、流紋岩)は、さらに、ソレアイト岩系(岩石系列)とカルクアルカリ岩系(岩石系列)に区分されることがある。それぞれの特徴について次の語句の二つを用いて2行程度で説明せよ。なお、語句中のFeOtは、全鉄含有量をFeOとして計算した値を示す。

語句： シュードタキライト、デイサイト、フォノライト、ペグマタイト、
ペロブスカイト、 $\text{FeOt}+\text{MgO}+\text{CaO}$ 、 FeOt/MgO 、 $\text{CaO}/\text{Al}_2\text{O}_3$ 、
 $\text{MgO}+\text{CaO}$ 、 $\text{Na}_2\text{O}+\text{K}_2\text{O}$ 、 K_2O 、 SiO_2

- (e) 火山岩、特に安山岩の斑晶鉱物には、マグマ混合が起きた際に生じる特徴がしばしば見られる。この特徴について3行程度で説明せよ。
- (f) 火成岩のうち、深成岩は、粗粒な等粒状組織をもつことが多いので、その構成鉱物の量比を基に分類されている。図IIIは、深成岩のうち、花崗岩質岩石を、含有する3種の鉱物の量比で細分したものである。図中の灰色部分の領域は広義の花崗岩を示す。三つの頂点の空欄①、②、③に当てはまるものを、次の語句の中から選び出して入れよ。

語句： アルカリ長石、かんらん石、黒雲母、斜長石、斜方輝石、石英

- (g) 日本列島の花崗岩質岩石は磁鉄鉱(マグネタイト)系列とチタン鉄鉱(イルメナイト)系列の二つに区分されることがある。それぞれの特徴と、この違いを生む原因として考えられているのは何か、合わせて6行程度で説明せよ。

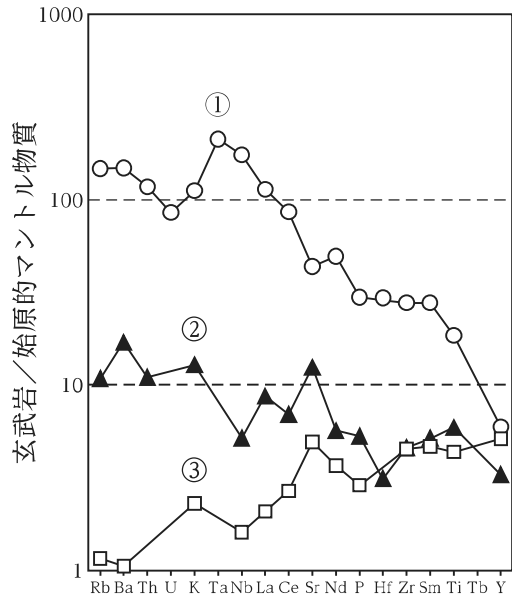


図 I スパイダー図

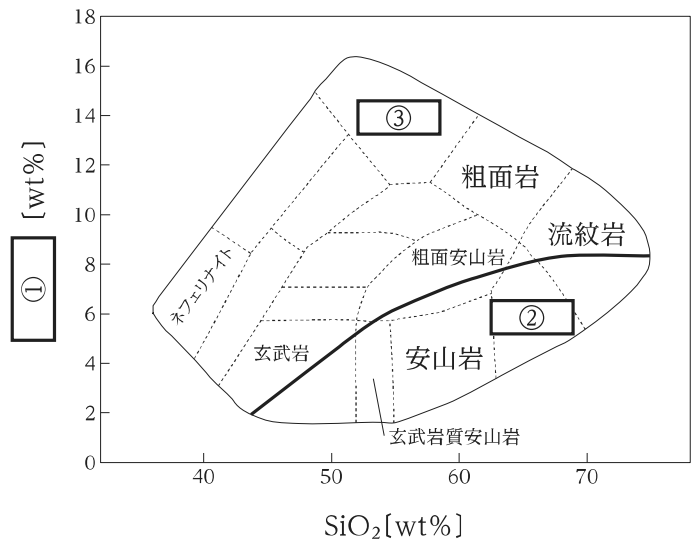


図 II 火山岩の分類

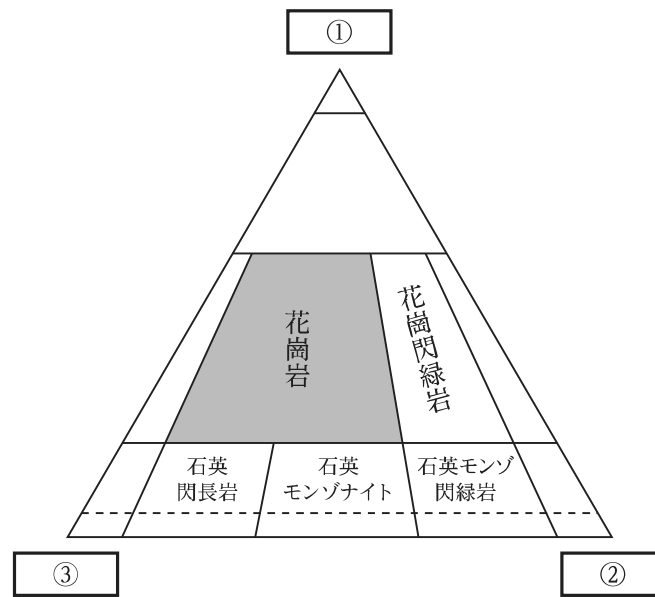
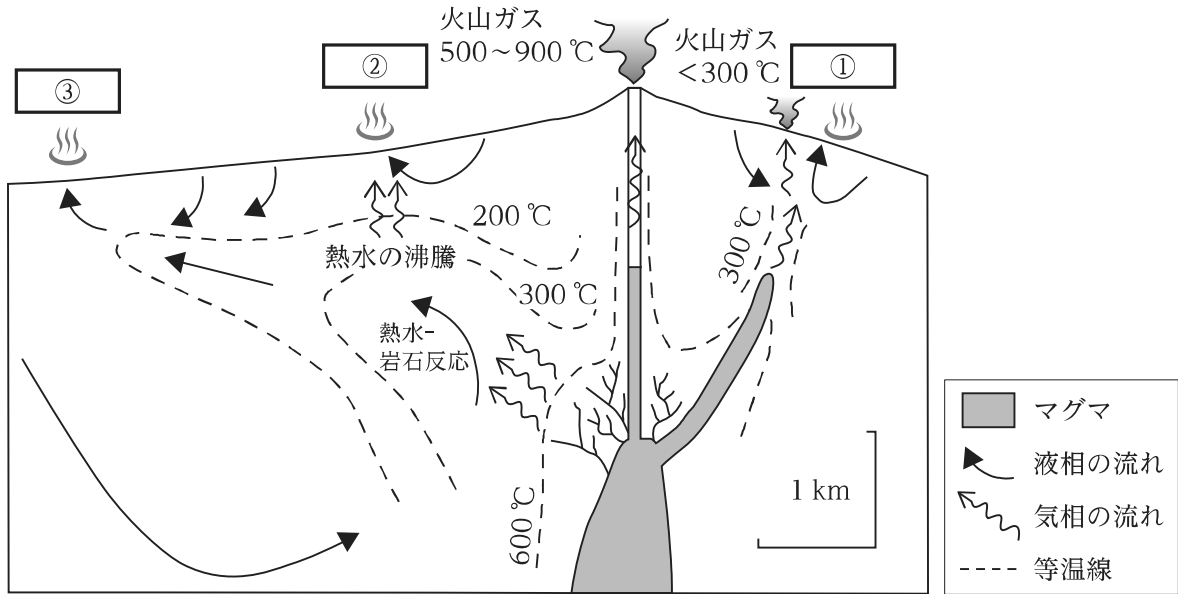
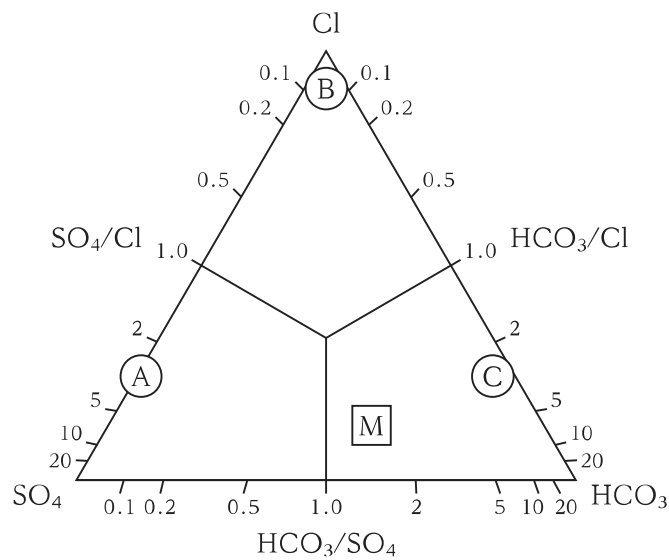


図 III 花崗岩質岩石の分類

- (2) 温泉は、火山性温泉と非火山性温泉に大別できる。また、地中に存在し、水を主体とする高エンタルピーの流体を熱水と呼ぶ。温泉・熱水に関する以下の問いに答えよ。
- (a) 温泉や熱水の水の起源を調べるために現在最も広く用いられている方法を、「同位体比」を用いて2行程度で説明し、さらに起源として考えられている水の種類を二つ挙げよ。
- (b) 火山性温泉は、主要な陰イオン(Cl 、 HCO_3 、 SO_4)濃度等の液性にに基づき分類されている。図IVは、ある火山の周辺に湧出する火山性温泉の形成過程を示している。この地域では3種類の温泉(A, B, C)が湧出している。各温泉の陰イオン濃度の相対比を図Vに、酸性度と陽イオン濃度を表Iに示す。これらの情報から、各温泉が図IVの空欄①、②、③のどれに当てはまるか答えよ。また、その理由について10~15行程度で説明せよ。なお、図V中のMはマグマ性ガスの陰イオン濃度の相対比を示す。
- (c) 熱水の温度を推定する方法の一つに流体包有物地質温度計がある。流体包有物は、鉱物中に捕獲された流体であり、捕獲時の流体の温度・圧力、化学組成の情報を有している。流体包有物地質温度計では、流体包有物を加熱しながら内部の相変化を観察し、流体包有物の捕獲温度(すなわち、捕獲された熱水の温度)を推定する。今、室温で気相と液相の2相である流体包有物について、この温度計を適用した場合、加熱時の相変化からどのようにして熱水の温度が得られるか、次の語句を全て用いて5行程度で説明せよ。ただし、解答中の用いた語句に下線を引くこと。PT図(横軸に温度、縦軸に圧力)を作成し、次の語句が示す線や温度を書き入れて説明してもよい。なお、この流体包有物は、捕獲時には液相のみであり、捕獲時の圧力は既知とする。
- [語句： 飽和蒸気圧曲線、均質化温度、アイソコア(等容積線)]
- (d) 火山のない地域で湧出している温泉を非火山性温泉といい、その一つに「グリーンタフ型温泉」がある。この温泉は、北海道から中国地方の日本海沿いに分布し、硫酸イオン濃度が高いという特徴をもつ。この温泉の硫酸イオンと水の起源について3行程度で説明せよ。



図IV 火山性温泉 A, B, C の形成過程



図V 火山性温泉 A, B, C の陰イオン濃度の相対比。M はマグマ性ガスの値を示す。

表 I 火山性温泉 A, B, C の酸性度と陽イオン濃度

温泉	酸性度 pH	陽イオン濃度 [mg/kg]					
		Na	K	Mg	Ca	Al	Fe
A	1.9	66	15	76	97	116	34
B	7.5	977	203	0.03	44	0.08	0.03
C	7.3	66	25	14	30	<0.02	0.01

II. 地球の内部に関する以下の問いに答えよ。

- (1) 地殻より下の地球内部構造を、深度に応じた構成物質の違いに注目して 5 行程度で説明せよ。
- (2) (1)で説明したような地球内部の物質分布が推定できる理由を、表 I、II と図 I ~ V を引用しながら説明せよ。ただし、図表は番号順に引用すること。
- (3) 図 III において、境界 A と境界 B がマントル内の物質移動に与える影響の違いを、沈み込んだスラブを例に 5 行程度で説明せよ。

表 I 地球及び構成物質の密度[g/cm³]

(地球平均以外は常温常圧において)

	密度
地球平均	5.5
地殻岩石	2.7~2.9
かんらん岩	3.3
金属鉄	7.9

表 II マントルの化学組成推定値[重量%]

- (ア) コンドライト隕石から金属鉄を差し引いて推定した組成
- (イ) マントル捕獲岩を基に推定した組成

	(ア)	(イ)
MgO	35.3	36.8
SiO ₂	50.9	45.4
FeO	7.3	8.1
Al ₂ O ₃	3.6	4.5
CaO	2.9	3.6
total	100.0	98.4

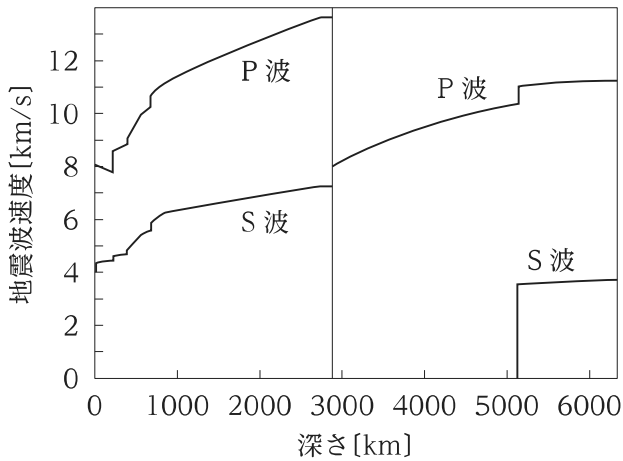


図 I 地球内部の地震波速度分布(PREM)

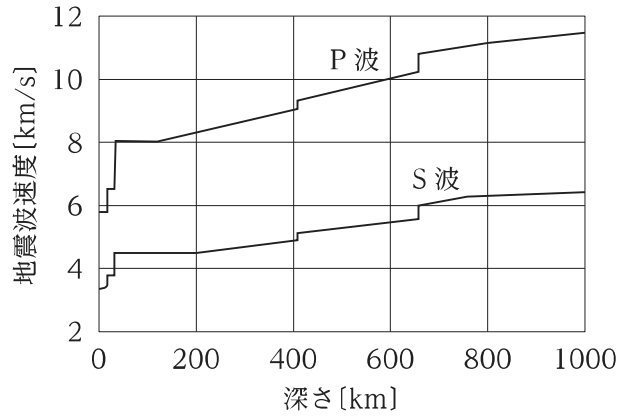


図 II 1000 km 以浅の地震波速度分布(IASP91)

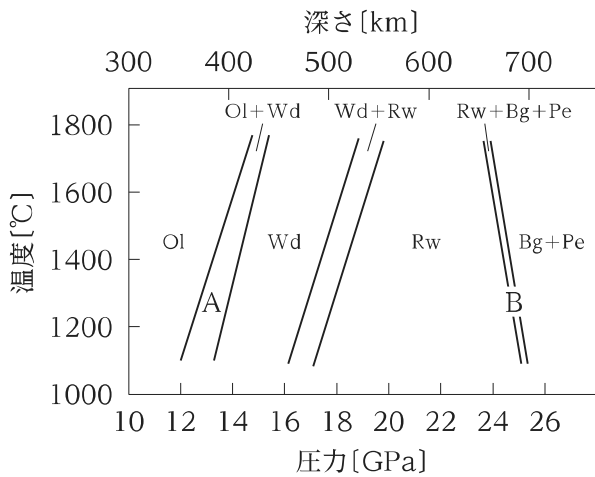


図 III かんらん石の状態図

(Ol: かんらん石、Wd: ウォズレアイト、
Rw: リングウッドイト、Bg: ブリッジマナイト、
Pe: フェロペリクレーズ)

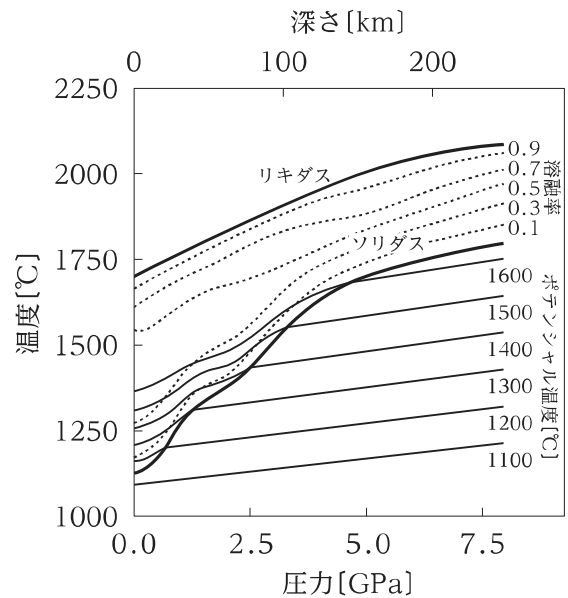


図 IV マグマ生成温度と
マンツルのポテンシャル温度

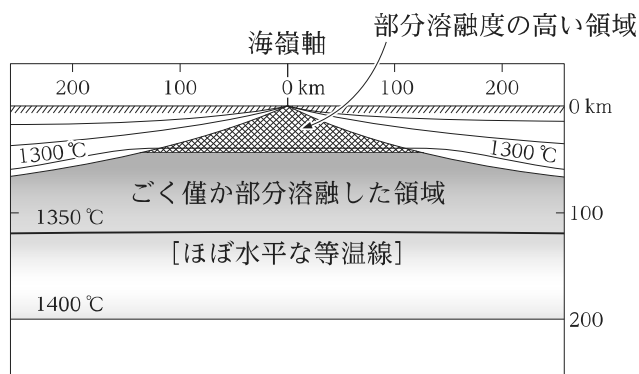


図 V 現在の中央海嶺の温度構造と部分溶融の起きる領域

科目別構成の詳細

科 目	出 題 数	問 題 番 号	ペ ー ジ
代数、幾何、解析、確率・統計	5 題	No. 1～5	1～8
情報科学	1 題	No. 6	9～10
数学モデル	1 題	No. 7	11
経営工学(経営数学・生産管理・品質管理)	1 題	No. 8	12～13
古典物理学、現代物理学(物性物理学を含む。)	3 題	No. 9～11	14～18
地球物理学	2 題	No. 12, 13	19～27
地質学	2 題	No. 14, 15	28～39

- **15 題のうちから任意の 2 題**を選んで解答してください。