（代数、幾何、解析、確率・統計）

【No.　　】 $n\times n$ 行列 $M\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$ に対して，M の転置行列を M^{T}，M の複素共役行列を $\overline{M}$ で表し，さらに，$M^{\mathrm{H}}=\overline{M}^{\mathrm{T}}$ と定義する。また，I_n を n 次単位行列，i を虚数単位とする。以下の設問に答えよ。

(1) $A\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$ を n 次エルミート行列，つまり $A^{\mathrm{H}}=A$ とする。このとき，次の(i)～(iv)を示せ。

(i) 行列 I_n-iA 及び I_n+iA は正則である。

(ii) $U=(I_n-iA)(I_n+iA)^{-1}$ は n 次ユニタリ行列，つまり $U^{\mathrm{H}}U=UU^{\mathrm{H}}=I_n$ である。

(iii) (ii)で定めた U は -1 を固有値にもたない。

(iv) (ii)で定めた U について $A=i(U+I_n)^{-1}(U-I_n)$ が成り立つ。

(2) 逆に，-1 を固有値にもたない n 次ユニタリ行列 U に対して，$A=i(U+I_n)^{-1}(U-I_n)$ により行列 A を定めたとき，A は n 次エルミート行列であることを示せ。

（なお，(1)，(2)で示された A と U の間の変換をケーリー変換という。）

(3) n 次実反対称行列 $B\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ と -1 を固有値にもたない n 次直交行列 $Q\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ は，

$$Q=(I_n-B)(I_n+B)^{-1}$$

$$B=(I_n+Q)^{-1}(I_n-Q)$$

により，一対一に対応することを示せ。

ただし，$Q\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ が直交行列であるとは，$Q^{\mathrm{T}}Q=QQ^{\mathrm{T}}=I_n$ であることをいう。また，$B\in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ が反対称行列であるとは，$B^{\mathrm{T}}=-B$ であることをいう。

（古典物理学、現代物理学（物性物理学を含む。））

【No.　　】 量子力学に関する以下の設問に答えよ。ただし，i は虚数単位とする。

Ⅰ．質量 m の粒子の１次元ポテンシャル $V(x)$ による束縛状態を考える。粒子の波動関数 $\psi(x)$ は時間を含まないシュレーディンガー方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right]\psi(x)=E\psi(x) \qquad \cdots①$$

を満たし，エネルギー固有値 E は負の実数である。

⑴　ポテンシャルが $V(-x)=V(x)$ を満たすとき，あるエネルギー固有値に対応する束縛状態の波動関数は偶関数か奇関数のどちらかでなければならないことを示せ。なお，１次元の束縛状態ではエネルギー固有値に縮退がないことを用いてよい。

以下では，波動関数が偶関数の場合，奇関数の場合，それぞれの状態を偶パリティ状態，奇パリティ状態と呼ぶことにする。

⑵　幅 $2a\,(a>0)$，深さ $\dfrac{H}{2a}\,(H>0)$ の１次元井戸型ポテンシャル

$$V_a(x)=\begin{cases}0 & (|x|>a)\\ -\dfrac{H}{2a} & (|x|\leqq a)\end{cases}$$

による式①の解を，A～D を定数として次のように書く。

$$\psi(x)=\begin{cases}Ae^{\gamma x} & (x<-a)\\ B\sin kx+C\cos kx & (-a\leqq x\leqq a)\\ De^{-\gamma x} & (x>a)\end{cases}$$

ただし，$\gamma=\sqrt{\dfrac{2m}{\hbar^2}|E|}$，$k=\sqrt{\dfrac{2m}{\hbar^2}\left|\dfrac{H}{2a}+E\right|}$ である。

任意の x に対して $\psi(x)$ 及びその一次微分 $\psi'(x)$ が連続であることから，偶パリティ状態，奇パリティ状態のそれぞれについて γ と k の関係式を求めよ。

⑶　⑵において，ポテンシャル $V_a(x)$ による束縛状態の偶パリティ状態に対して，$a\to 0$ の極限におけるエネルギー固有値を求めよ。

⑷　⑵のポテンシャル $V_a(x)$ は $a\to 0$ の極限においては，次のように書くことができる。

$$V_0(x)=-H\delta(x)$$

ここで，$\delta(x)$ はディラックの δ 関数で，次の性質をもつ。

$$\delta(x)=0 \quad (x\neq 0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1$$

ポテンシャル $V_0(x)$ による式①の解の一次微分 $\psi'(x)$ について

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\{\psi'(\varepsilon)-\psi'(-\varepsilon)\}$$

を求めよ。ただし，$\psi(0)=N\,(N\neq 0)$ とする。

(5)　(4)において，ポテンシャル $V_0(x)$ に対するエネルギー固有値を求めよ。

(6)　以下のポテンシャル $V_\lambda(x)$ による束縛状態の偶パリティ状態，奇パリティ状態のそれぞれについて $\gamma=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}|E|}$ を決定する式を求めよ。

ただし，λ は正の実数であるとする。

$$V_\lambda(x)=-\lambda\{\delta(x+a)+\delta(x-a)\}$$

Ⅱ．時刻 t において，

$$\vec{B}(t)=(\overline{B}\cos\omega t,\ \overline{B}\sin\omega t,\ B_0)$$

で与えられる磁場中における，スピン $\frac{1}{2}$ の粒子のスピン状態について考える。ここで，$\overline{B}$，B_0，ω は実定数である。

磁場と粒子の相互作用ハミルトニアン $H(t)$ は，

$$H(t)=-\frac{\gamma\hbar}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{B}(t)$$

で表され，粒子のスピン波動関数 $\Psi(t)$は，時間に依存するシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{d\Psi(t)}{dt}=H(t)\Psi(t)$$

を満たす。

ここで，γ は実定数，$\vec{\sigma}=(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z)$ はパウリ行列であり，

$$\sigma_x=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_y=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix},\quad \sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

と定義される。

なお，必要であれば，パウリ行列に関する以下の性質(a)，(b)を用いてよい。

(a)　添え字 (p,q,r) が (x,y,z)，(y,z,x)，(z,x,y) のいずれかであるとき次の関係式を満たす。

$$\sigma_p\sigma_q-\sigma_q\sigma_p=2i\sigma_r$$

$$\sigma_p\sigma_q+\sigma_q\sigma_p=0$$

(b)　任意の単位ベクトル $\hat{n}$，実数 θ に対して次の関係式を満たす。

$$e^{i\theta(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})}=I\cos\theta+i(\hat{n}\cdot\vec{\sigma})\sin\theta$$

ここで，I は2行2列の単位行列である。

(1)　任意の実数 θ に対して，次式を証明せよ。

$$e^{i\theta\sigma_z}\sigma_x e^{-i\theta\sigma_z}=\sigma_x\cos 2\theta-\sigma_y\sin 2\theta$$

$$e^{i\theta\sigma_z}\sigma_y e^{-i\theta\sigma_z}=\sigma_y\cos 2\theta+\sigma_x\sin 2\theta$$

(2)　次式を満たすような実数 φ を求めよ。

$$e^{i\varphi\sigma_z t}H(t)e^{-i\varphi\sigma_z t}=-\frac{\gamma\hbar}{2}(\sigma_x\overline{B}+\sigma_z B_0)$$

⑶　時刻 $t=0$ において粒子のスピンの向きは z 軸の正の方向であった。すなわち，

$$\Psi(t=0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

とする。

(i)　⑵の φ を用いて $\chi(t)$ を

$$\chi(t)=e^{i\varphi\sigma_z t}\Psi(t)$$

で定義したとき，$\chi(t)$ が満たす微分方程式を求めよ。

(ii)　$\chi(t)$ を

$$\chi(t)=\begin{pmatrix}a(t)\\b(t)\end{pmatrix}$$

とおき，$b(t)$ が満たす 2 階微分方程式を求めよ。

(iii)　時刻 $t\,(t>0)$ にこの粒子のスピンが z 軸の負の方向を向いている状態 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ にある確率を求めよ。

⑷　磁場中におけるスピン $\dfrac{1}{2}$ の粒子の振る舞いを，以下の (i)，(ii) の場合についてそれぞれ論ぜよ。

(i)　$\overline{B}=0$，$B_0\neq0$，すなわち，一定磁場のみの場合。

(ii)　$\overline{B}\neq0$，$B_0\neq0$ (ただし，$\left|\dfrac{\overline{B}}{B_0}\right|\ll1$)，すなわち，一定磁場とそれに垂直な振動磁場があり，振動磁場の大きさが一定磁場の大きさに比べて十分小さい場合。

（地質学）

【No.　　】 地質学に関する以下の設問に答えよ。ただし，使用する語句が指定されている問いにおいては，用いた語句に下線を引くこと。

Ⅰ．地球の歴史を通じて地球環境の様々な変化が生物の進化に影響を及ぼし，その一方で生物の進化も環境に影響を与えてきた。例えば，海水準や気温の変化は生物の分布域に影響し，光合成生物の登場は大気組成を変化させた。

図Ⅰは顕生代の地球表層部の環境や生物に関する様々な指標の変動を示している。各グラフの横軸は時間軸であるが，縦軸の単位やスケールはグラフによって異なる。

⑴　グラフＡ～Ｄは「大気中の酸素濃度」，「大気中の二酸化炭素濃度」，「海生動物の科の数」，「海水準変動」のうち，いずれかの変動パターンの概要を示したものである。それぞれのグラフが，このうちいずれに対応しているかを示せ。

⑵(i)　グラフＡ中の五つの矢印に共通する出来事を示せ。

(ii)　グラフＡ中の矢印のうち①と②に示される出来事について，次の語句を全て用いて５行程度で説明せよ。

［語句：　床板サンゴ，爬虫類，フズリナ，イノセラムス，顕生代で最大規模，イリジウム］

⑶(i)　グラフＢ中の矢印③に示される減少傾向について，次の語句を全て用いて３行程度で説明せよ。

［語句：　寒冷化，パンゲア超大陸，大陸棚］

(ii)　グラフＢ中の矢印④に示されるグラフの極大について，次の語句を全て用いて３行程度で説明せよ。

［語句：　温暖化，海洋プレート，中央海嶺］

⑷　グラフＣ中の極大⑤とグラフＤ中の極小⑥は同じ要因によって説明できる。その要因とは何か，次の語句を全て用いて３行程度で説明せよ。

［語句：　炭素の固定，光合成，埋没］

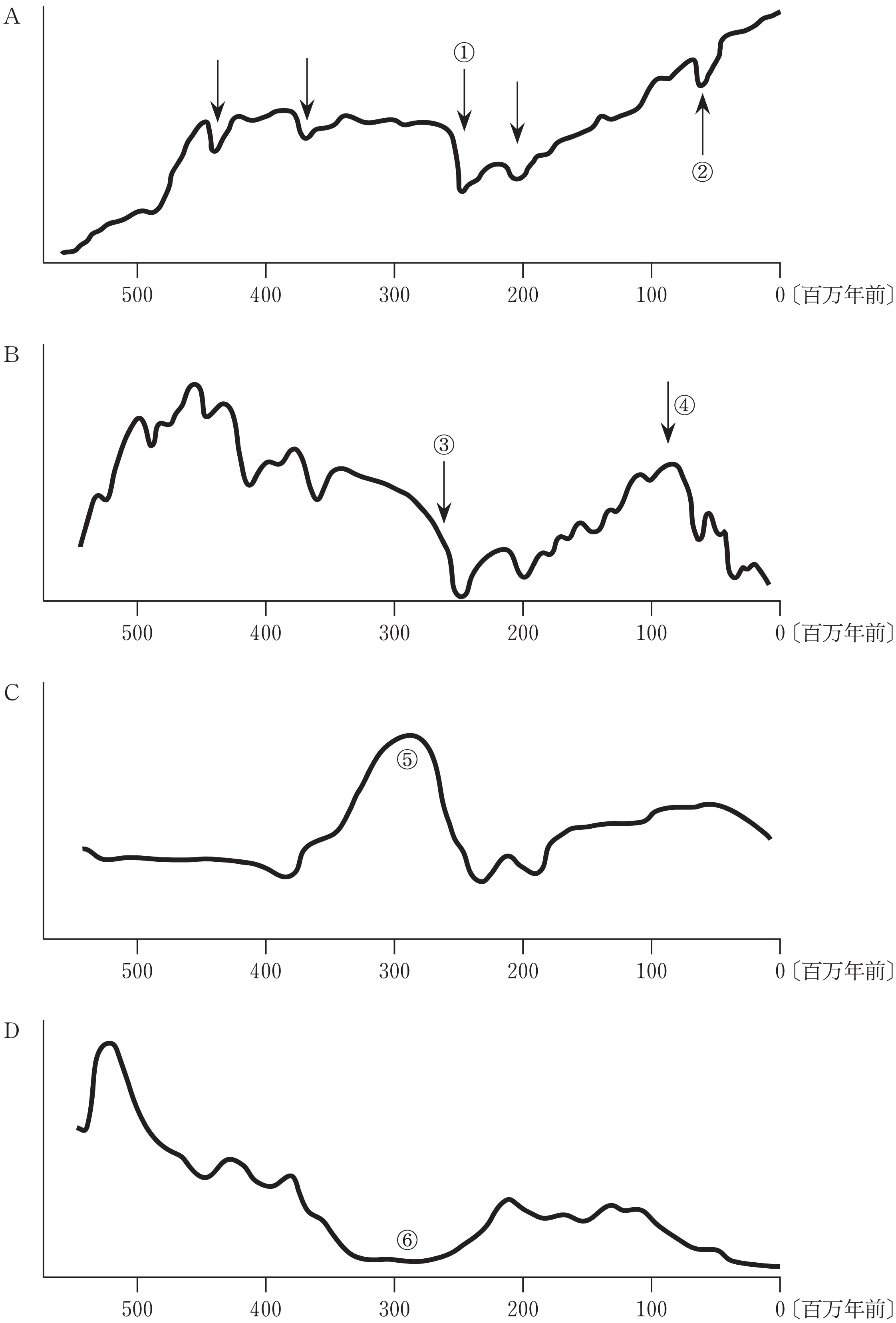

A
①
②
500
400
300
200
100
0〔百万年前〕
B
③
④
500
400
300
200
100
0〔百万年前〕
C
⑤
500
400
300
200
100
0〔百万年前〕
D
⑥
500
400
300
200
100
0〔百万年前〕

図 I

Ⅱ．地質図を作成する際は，ある地点の露頭において測定した堆積岩の走向・傾斜を用いて，図学的な計算と作図によって一定の範囲内で地層面を延長し，地表や地下に分布する地層境界線を描く。この手法を地質図学と呼ぶ。通常，地表は土壌や植生で覆われているために，実際の地質調査において地質情報が得られる露頭は孤立・散在している。地質図学は，散在する露頭において得られた地層分布と走向・傾斜のデータから，地層境界線が地形に対してどのように現れるかを描き出し，地質構造を把握するための手法である。

⑴　地質図学が適用できる根拠と，地質図学を適用する際の留意点及び留意すべき理由を次の語句を全て用いて10行程度で説明せよ。

［語句：　水平，平面，堆積岩，深成岩］

⑵　図Ⅱは，ある地域の地質調査を行い，露頭において見られる地層の観察結果をまとめたものである。

(i)　図中の情報をもとにして，地質図を完成せよ。また，X－X′における地質断面図を完成せよ。

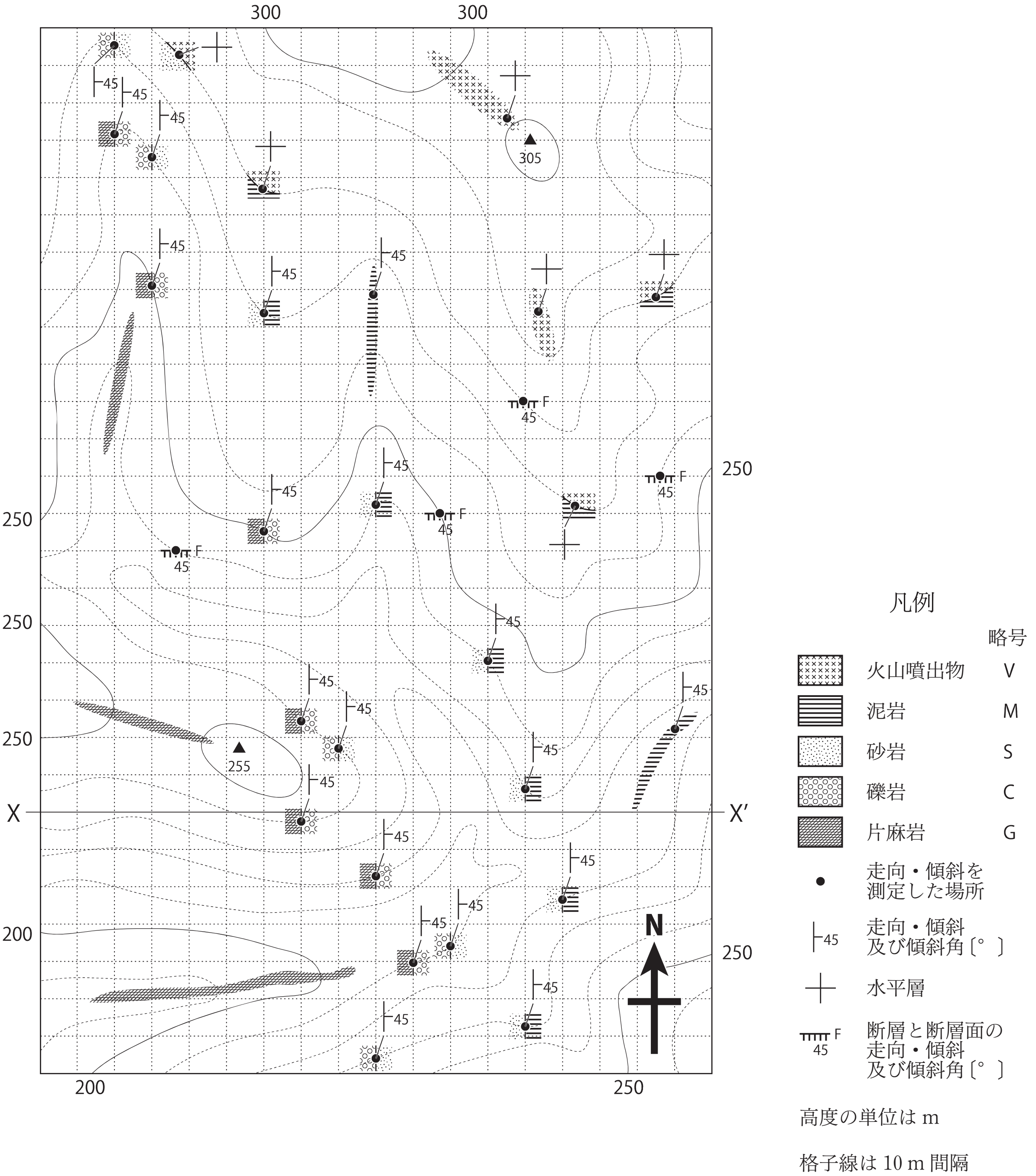
ただし，地層境界線及び断層が通る地点に「・」を記し，これらを滑らかに結んで地層境界線及び断層を描くとともに，ある岩種が分布する領域毎にその略号を一つずつ記入せよ。答案用紙には，例として，片麻岩と礫岩の境界線が通る地点のいくつかに「・」を記して境界線の一部を描き，岩種の略号を記入してある。また，10 m間隔の格子線が描かれている。

(ii)　この地域の地史について，箇条書きにして説明せよ。

(iii)　この地域に分布する礫岩の厚さは，およそ何mか。導出の根拠と計算式を示し，整数値で求めよ。ただし，$\sqrt{2}=1.4$とする。

(iv)　この地域に認められる断層に関する次の記述について，㋐，㋑に当てはまる数値を求めよ。

「この断層は，走向がN90° E，南に45° 傾斜する断層面をもち，断層に沿う地層のずれは垂直方向に $\boxed{㋐}$ m，水平方向に $\boxed{㋑}$ mである。」



300
300
305
250
250
250
255
250
X
X′
200
250
200
250
N
凡例
略号
火山噴出物 V
泥岩 M
砂岩 S
礫岩 C
片麻岩 G
走向・傾斜を測定した場所
走向・傾斜及び傾斜角〔°〕
水平層
断層と断層面の走向・傾斜及び傾斜角〔°〕
高度の単位は m
格子線は 10 m 間隔

図Ⅱ